A-011

内部3連結cubic平面グラフの最少線分格子凸描画
Minimum-Segment Convex Grid Drawings of Internally Triconnected Cubic Plane Graphs

三浦　一之 *
Kazuyuki Miura

概 要

平面グラフ G の凸描画においては，全ての辺は交差しない直線分で描かれ，全ての面は凸多角形で描かれる．G の凸描画で，各点が整数座標を持つものを格子凸描画という．G の凸描画で，極大線分の数が最少となるものを最少線分凸描画という．G の最少線分凸描画で，各頂点が整数格子上にあるものを最少線分格子凸描画という．G が 3 連結 cubic グラフならば，G は最小線分凸描画を持つことが知られている．更に，G が 3 連結 cubic グラフならば，G は大きさ $(3n/2+1)\times(5n/2+1)$ の整数格子内に，線形時間で最少線分格子凸描画できることが知られている．ここで，n は G の点数を表す．

本論文では，内部 3 連結 cubic グラフ G の 3 連結成分分解木 $T(G)$ が 2 枚あるいは 3 枚の葉を持つならば，G は大きさ $n\times n$ の整数格子内に最少線分格子凸描画できることを証明するとともに，そのような描画を求める線形時間アルゴリズムを与える．

1　序論

近年，様々な分野で与えられたグラフ，特に平面グラフを「構造を理解しやすく」かつ「きれいに」描画する手法が求められている [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]．平面グラフ G の描画で，G の各辺が交差の無い直線分として描かれたものを**直線描画**という．G の直線描画で，全ての面が凸多角形であるものを G の**凸描画**という．G の凸描画で，G の各点が整数座標を持つものを G の**格子凸描画**という．なお，本論文ではグラフ G の点数を n で表す．また，大きさ $W\times H$ の**整数格子**は $W+1$ 本の垂直線分と $H+1$ 本の水平線分およびそれらの交点からなり，その外周は矩形であるとする．任意の 3 連結平面グラフは $(n-2)\times(n-2)$ の大きさの整数格子に線形時間で格子凸描画できることが知られている [3]．近年，凸描画および格子凸描画に更なる制約を加えたより見やすい描画法の研究が行われている [5]. 本論文では，その中の一つである**最少線分格子凸描画**を扱う．

Γ を G の直線描画とする．Γ において，点 v に接続する連続した 2 辺がなす角を θ_v と書く．$\theta_v=180^\circ$ ならば，θ_v を**平角**という．Γ における辺集合 S が，Γ において直線分となる極大な集合であるならば，S を**極大線分**という．図 1(c) のように，G の凸描画で，極大線分の数が最少となるものを G の**最少線分凸描画**という．最少線分凸描画は，単なる凸描画よりも見やすい場合が多い [5]. 全ての頂点の次数が 3 となるグラフを **cubic グラフ**という．G が 3 連結 cubic グラフならば，G は最小線分凸描画を持つことが知られている [5]．G の最少線分凸描画で，しかも格子描画であるものを G の**最少線分格子凸描画**という．G が 3 連結 cubic グラフならば，G は大きさ $(3n/2+1)\times(5n/2+1)$ の整数格子内に，線形時間で最少線分格子凸描画できることが知られている [9]．しかし，それ以外の自明でないグラフが最小線分格子凸描画できるかどうかは知られていない．

本論文では，内部 3 連結 cubic グラフ G の 3 連結成分分解木 $T(G)$ が 2 枚あるいは 3 枚の葉を持つならば，G は大きさ $n\times n$ の整数格子内に最少線分格子凸描画できることを証明するとともに，そのような描画を求める線形時間アルゴリズムを与える．図 1(a) および (c) に本アルゴリズムの入力と出力の例を示す．

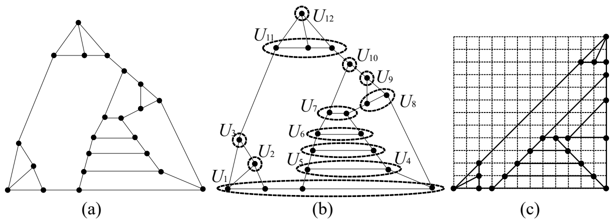

図 1: (a) 内部 3 連結 cubic グラフ G，(b) G の正規分割 Π, (c) G の最少線分格子凸描画.

2　準備

本節では，いくつかの定義と既知の補題を与える．グラフ G は点の集合 V と辺の集合 E からなり，$G=(V,E)$ で表す．辺交差なしに描画できるグラフを**平面グラフ**という．グラフの頂点 v に接続する辺の数を次数といいい，$d(v)$ と書く．全ての頂点の次数が 3 となるグラフを **cubic グラフ**という．2 連結平面グラフ G において，点の対 $\{u,v\}$ を G から取り除いた結果，グラフ G が非連結となるならば $\{u,v\}$ を**分離対**という．グラフ G が分離対を持たないならば，2 連結グラフ G は **3 連結**であるという．G の任意の分離対 $\{u,v\}$ に対して，u，v が共に外点であり，$G-\{u,v\}$ の各々の連結成分が外点を含むならば，2 連結平面グラフ G は**内部 3 連結**であるという．$G=(V,E)$ を 2 連結グラフとし，u,v を G の分離対とする．このとき，G は以下の 2 つの条件 (a),(b) を満たすような 2 つのグラフ $G'_1=(V_1,E'_1)$ と $G'_2=(V_2,E'_2)$ を持つ．
(a) $V=V_1\bigcup V_2$，$V_1\bigcap V_2=\{u,v\}$；
(b) $E=E'_1\bigcup E'_2$，$E'_1\bigcap E'_2=\phi$，$|E'_1|\geq 2$，$|E'_2|\geq 2$.

G の分離対 $\{u,v\}$ について，$G_1=(V_1,E'_1+(u,v))$ と $G_2=(V_2,E'_2+(u,v))$ を，$\{u,v\}$ に関する G の**分離グラフ**という．G_1 と G_2 に加えられる新しい辺 (u,v) は，**仮想辺**と呼ぶ．G が多重辺を持っていなくても，G_1 と G_2 は多重辺を持つかもしれない．グラフ G を 2 つの分離グラフ G_1 と G_2 に分けることを，**分離**という．2 つの分離グラフ G_1 と G_2 を再び組み合わせ G を構成することを，**結合**という．つまり，結合は分離の逆である．分離グラフをさらに分離する，という操作をそれ以上分離できなくなるまで繰り返す．このようにして出来るグラフを G の**分離成分**という [3, 8]．G の分離成分は，次の 3 つのいずれかである (1)3 連結グラフ; (2)3 本の多重辺 (2 点が 3 本の辺で繋がれているもの); (3) 三角形 (長さ 3 の面閉路)．G の分離成分のうち，3 本の多重辺を可

*福島大学大学院 共生システム理工学研究科

能な限り組み合わせて一組の多重辺を構成し，三角形を可能な限り組み合わせて閉路を構成することにより得られるものを G の **3 連結成分**という [3, 8]．G の 3 連結成分は，次の 3 つのいずれかである：(a)3 連結グラフ; (b) 多重辺; (c) 閉路．各点が G の各 3 連結成分 H_i に対応し，H_i と H_j が同じ分離対に関する 3 連結成分であるときかつそのときのみ辺 $(H_i,H_j)(i{\neq}j)$ を持つ木 $T(G)$ を考える．$T(G)$ を **3 連結成分分解木**または単に G の**分解木**と呼ぶ．$l(G)$ によって，$T(G)$ の葉の数を示す．G が 3 連結ならば，$T(G)$ は一つの独立した点となり，$l(G)$=1 となる．

$G = (V, E)$ を $l(G) \leq 3$ である内部 3 連結平面グラフとし，$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ であるとする．v_1 と v_2 は $F_o(G)$ 上に連続して表れるとする．Π=$(U_1, U_2, \cdots, U_m)$ を，空ではない部分集合 $U_1 {\cup} U_2 {\cup} \cdots {\cup} U_m$ からなる V の順序付き分割とする．$1 \leq k \leq m$ なる各 k に対し，$U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_k$ によって誘導される G の部分グラフを G_k とする．また $0 \leq k \leq m-1$ なる各 k に対して，$U_{k+1} \cup U_{k+2} \cup \cdots \cup U_m$ によって誘導される G の部分グラフを $\overline{G_k}$ とする．以下の条件 (a) および (b) が成り立つならば，Π を辺 (v_1, v_2) に関する
G の**正規分割**であるという．

(a) U_1 は (v_1, v_2) を含む内面にあるすべての点から成る．$U_m = \{v_n\}$ かつ，

(b) $2 \leq k \leq m-1$ なる各 k に対して，U_k の全ての点は G_k の外点であり，次の (b1)，(b2) が成り立つ．
 (b1) もし｜U_k｜ $= 1$ ならば，U_k の点は，G_{k-1} に 2 つ以上の隣接点を持ち，$\overline{G_k}$ に 1 つ以上の隣接点を持つ (図 2(a) 参照)．
 (b2) もし｜U_k｜≥ 2 ならば，U_k の点は，G_{k-1} にちょうど 2 つの隣接点を持ち，$\overline{G_k}$ に 1 つ以上の隣接点を持つ (図 2(b) 参照)．

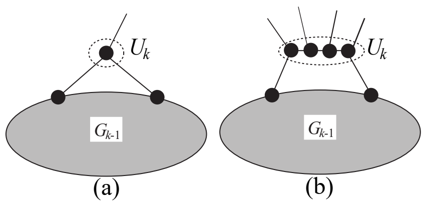

図 2: (a) 正規分割の条件 (b1), (b) 正規分割の条件 (b2)．

図 1(b) に正規分割の例を示す．以下の補題が知られている．

補題 2.1 [3, 9] 平面グラフ G の 3 連結成分分解木 $T(G)$ は線形時間で構成できる．

補題 2.2 [3, 6] G が内部 3 連結平面グラフであり，$l(G) \leq 3$ と仮定する．この時 v_1, v_2 および v_n を以下のように選ぶならば，線形時間で G の正規分割 Π を見つけることが出来る．

($Case1 : l(G) = 3$) この場合は，$T(G)$ の葉に対応する 3 つの 3 連結成分それぞれから，G の分離対ではない任意の外点を選択する．

($Case2 : l(G) = 2$) この場合は，上記と同様に $T(G)$ の葉の 2 つから 2 点を選択する．さらに G の任意の外点から 1 つ選択する．

($Case3 : l(G) = 1$) この場合は，G は 3 連結である．このとき G の任意の 3 つの外点を選択する．

補題 2.3 [5]　G を *3* 連結 *cubic* 平面グラフとし，Γ を G の凸描画とする．このとき，Γ の平角の数は高々$n-3$ であり，極大線分の数は少なくとも $n/2+3$ である．

補題 2.4 [9] G を n 点からなる *3* 連結 *cubic* 平面グラフとする．このとき G は高々$(3n/2+1) \times (5n/2+1)$ の整数格子内に，線形時間で最少線分格子凸描画できる..

3　アルゴリズム

本節ではアルゴリズムの概略を述べるとともに，本論文の主定理を与える．

本アルゴリズムは [9] のアルゴリズムを一部改良したものである．$l(G) = 3$ の場合についてのみ考えよう．$l(G) = 2$ の場合も同様である．まず，補題 2.2 の Case 1 のように v_1, v_2 および v_n を定め，G の正規分割 $\Pi = \{U_1, U_2, \cdots, U_m\}$ を求める．補題 2.3 より，G が最小線分格子凸描画を持つためには，v_1, v_2 および v_n 以外の全ての点がちょうど 1 つの平角を持てばよいことがわかる．このとき，[9] のアルゴリズムと同様にして，点の配置の仕方を工夫することにより，v_1, v_2 および v_n 以外の全ての点がちょうど 1 つの平角を持つように描画できることを証明できる．しかも，[9] のアルゴリズムでは v_1 と v_2 を結ぶ線分を水平線分で描画することはできないが，$l(G) = 3$ の場合には図 1(c) のように，v_1 と v_2 を結ぶ線分を水平線分で描画できる．したがって，描画に必要な格子の大きさを大幅に小さくできることが証明できる．詳細については省略する．

次の主定理が成り立つ．

定理 1 G を n 点からなる内部 3 連結 cubic 平面グラフとし，G の 3 連結成分分解木 $T(G)$ が 2 枚あるいは 3 枚の葉を持つとする．このとき G は高々$n \times n$ の整数格子内に線形時間で最少線分格子凸描画できる．

謝辞

この研究は栢森情報科学振興財団の助成を受けて遂行された．

参考文献

[1] N. Chiba, K. Onoguchi and T. Nishizeki, *Drawing planar graphs nicely*, Acta Inform., 22, pp.187-201 1985.

[2] N. Chiba, T. Yamanouchi and T. Nishizeki, *Linear algorithms for convex drawings of planar graphs*, in Progress in Graph Theory, J.A. Bondy and U.S.R. Murty (eds.), Academic Press, pp.153-173 1984.

[3] M. Chrobak and G. Kant, *Convex grid drawings of 3-connected planar graphs*, International Journal of Computational Geometry and Applications, 7, pp.211-223 1997.

[4] V. Dujmovic, D. Eppstein, M. Suderman and D. R. Wood, *Drawings of planar graphs with few slopes and segments*, Computational Geometry:Theory and Applications, 38(3), pp.194-212, 2007.

[5] D. Mondal, R. I. Nishat, S. Biswas and M. S. Rahman, *Minmum-segment convex drawings of 3-Connected cubic plane graphs*, Journal of Combinatorial Optimization-JCO, pp.1-21, 2011.

[6] T. Nishizeki and Md. S. Rahman, *Planar Graph Drawing*, World Scientific, Singapore 2004.

[7] M. A. H. Samee, M. J. Alam, M. A. Adnan and M. S. Rahman, *Minimum-segment drawings of series-parallel graphs*, In 16th International Symposium on Graph Drawing, LNCS 5417, pp.408-419, 2009.

[8] W. T. Tutte, *How to draw a graph*, Proc. London Math. Soc., 13, pp.743-768 1963.

[9] 3 連結 cubic 平面グラフの最少線分格子凸描画, Forum on Information Technology (FIT2016), Vol.1, No 1, pp.80–81, (2016).