A-007

3 連結内部極大外平面グラフの完全独立全域木

高橋 拓弥　　　荒木 徹

群馬大学大学院

1 導入

グラフ G の頂点集合を $V(G)$，辺集合を $E(G)$ と表す。部分集合 $U \subseteq V(G)$ による G の誘導部分グラフを $G[U]$ で表す。また，グラフ G のパスを $(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ のように表記する。ここで，$1 \leq i \leq k-1$ に対して $u_i u_{i+1} \in E(G)$ である。始点が u，終点が v であるパスを u-v パスという。二つの u-v パス P_1, P_2 が，$V(P_1) \cap V(P_2) = \{u, v\}$ かつ $E(P_1) \cap E(P_2) = \emptyset$ であるとき，P_1 と P_2 は**内素である**という。

$T_1, T_2, \ldots, T_k$ を連結グラフ G の全域木とする。任意の 2 頂点 u, v に対して，全域木 T_i における u-v パスを P_i としたとき，$P_1, P_2, \ldots, P_k$ が互いに内素であるならば，$T_1, T_2, \ldots, T_k$ は G の**完全独立全域木**であるという。Hasunuma[2] によって，完全独立全域木が定義された。文献 [2] では，完全独立全域木の特徴付けも示されたが，ここではそれと異なる特徴付けを紹介する。

$V(G)$ の分割を $(V_1, V_2, \ldots, V_k)$ とする。二部グラフ $B(V_i, V_j, G)$ を，頂点集合の二部分割が (V_i, V_j) であり，辺集合が $\{uv \mid u \in V_i, v \in V_j, uv \in E(G)\}$ であるグラフとする。$V(G)$ の分割 $(V_1, V_2, \ldots, V_k)$ が以下の二つの条件を満たすならば，その分割を G の **CIST-Partition** という。

- 任意の $1 \leq i \leq k$ に対して $G[V_i]$ が連結である。
- 任意の $1 \leq i < j \leq k$ に対して，二部グラフ $B(V_i, V_j, G)$ の各成分が木ではない。

Araki[1] による，グラフが完全独立全域木を持つための特徴付けを以下に示す。

定理 1.1 ([1])**.** 連結グラフ G が k 個の完全独立全域木を持つための必要十分条件は，G が CIST-Partition $(V_1, V_2, \ldots, V_k)$ を持つことである。

平面グラフとは，辺が交差しない描画を持つグラフである。**外平面グラフ**とは，平面グラフであり，かつすべての頂点が外面に接しているような描画を持つグラフである。正整数 $k \geq 1$ に対して，平面グラフ G が k **外平面グラフ**であるとは，以下の性質を満たすことをいう。

1. G が外平面グラフならば，G は 1 外平面グラフである。
2. G が外平面グラフでないとき，G の描画において外面と接する頂点を削除したグラフが $k-1$ 外平面グラフならば，G は k 外平面グラフである。

Hasunuma[3] によって，任意の 4 連結極大平面グラフに 2 つの完全独立全域木が存在することが証明された。また，Péterfalvi[4] は，3 連結極大平面グラフには 2 つの完全独立全域木を持たないものが存在することを証明した。本研究では 3 連結内部極大平面グラフについて考察し，次の二つを示した。(1) 任意の 3 連結内部極大 2 外平面グラフに 2 個の完全独立全域木が存在する。(2) 3 連結極大 4 外平面グラフに 2 個の完全独立全域木を持たないものが存在する。

2 3 連結内部極大 2 外平面グラフ

3 連結内部極大 2 外平面グラフとは，3 連結かつすべての内面が三角形である 2 外平面グラフである。3 連結内部極大 2 外平面グラフ G は，以下の性質を満たすことが証明できる。

1. 外面と接する頂点の集合を V_C としたとき，V_C が誘導する部分グラフ $G[V_C]$ がサイクルとなる。すなわち，$G[V_C]$ は弦（外面と接しない辺）を持たない。
2. $V_I = V(G) \setminus V_C$ が誘導する部分グラフ $G[V_I]$ は連結な外平面グラフである。

外面に接する頂点の集合 V_C による誘導部分グラフ $G_C = G[V_C]$ を G の**外周**と呼ぶ。また，外周を取り除いて得られる部分グラフを $G_I = G[V_I]$ と表す。

すべての内面が 3 サイクルであることから，以下の性質が成り立つ。

1. 外周上の任意の辺 $e = c_1 c_2$ に対して，ある $u \in V_I$ が存在して，3 サイクル (c_1, u, c_2, c_1) がある。
2. G_I の外面と接する任意の辺 $e = u_1 u_2$ に対して，e

が G_i のブリッジならば，外周上の 2 個の頂点 c_1, c_2 が存在して，4 サイクル $(u_1, c_1, u_2, c_2, u_1)$ がある。e が G_I のブリッジがないならば，外周上の頂点 c が存在して，3 サイクル (u_1, c, u_2, u_1) がある。

ここでは，次の命題を証明する。

定理 2.1. 3 連結内部極大 2 外平面グラフ G には，2 個の完全独立全域木が存在する。

Proof. 本稿では証明の概要のみ示す。G に CIST-Partition (V_1, V_2) が存在することを示す。

まず V_I が 1 頂点のときを考える。$V_I = \{v\}$ とし，外周上の任意の頂点 c を選び, $V_1 = \{c, v\}$, $V_2 = V(G) \setminus V_1$ とすると，$G[V_1]$ と $G[V_2]$ はどちらも連結であり，かつ $B(V_1, V_2, G)$ が連結グラフであり，かつ木でないことが簡単に確認できる。よって，(V_1, V_2) は CIST-Partition である。

V_I が 2 つ以上の頂点を持つとする。$V_1 = V_C$，$V_2 = V_I$ とする。$G[V_1]$ と $G[V_2]$ はどちらも連結であることは簡単に分かる。次に，二部グラフ $B = B(V_1, V_2, G)$ を考える。まず，B が連結グラフであることを示すことができる。よって，$B(V_1, V_2, G)$ にサイクルが存在することを示せばよい。G_I にブリッジ u_1u_2 があるとき，外周上の頂点 c_1, c_2 が存在して，G に 4 サイクル $(u_1, c_1, u_2, c_2, u_1)$ がある。$u_1, u_2 \in V_1$，$c_1, c_2 \in V_2$ より，これは B 上のサイクルである。G_I にブリッジが存在しないとき, G_I の外面と接する辺は回路（closed trail）$C_I = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ を誘導する。C_I 上の各辺 u_iu_{i+1} に対して，外周上の頂点 c_i が存在して $u_ic_i, u_{i+1}c_i$ が B の辺となる。これより閉路 C_I から B 上の閉じた u_1-u_1 ウォークが存在することがいえる。このウォークはサイクルを含ので，(V_1, V_2) は CIST-Partition である。 □

3　3 連結極大 4 外平面グラフ

Péterfalvi[4] により，3 連結極大平面グラフには 2 個の完全独立全域木を持たないものが存在することが示された。Péterfalvi の証明の概要は以下の通りである。もし 3 連結極大平面グラフ G に 2 個の完全独立全域木が存在したとすると，その双対グラフ G^d は 3 連結 3 正則平面グラフであり，かつハミルトニアンであることが証明できる。逆に，3 連結 3 正則平面であり，かつハミルトニアンでないグラフの双対グラフから，2 個の完全独立全域木を持たないグラフを構成可能である。実際，3 連結 3 正則平面であり，かつハミルトニアンでないグラフが存在することがすでに知られている [5]。

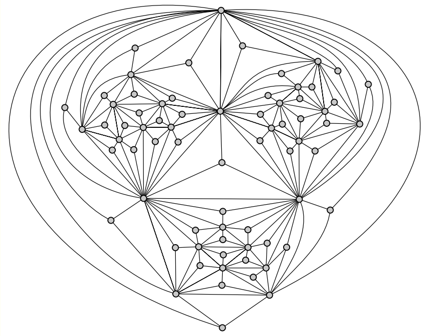

図 1　2 個の完全独立全域木を持たない 3 連結極大 4 外平面グラフの例

この方法によって作成したグラフの一例が図 1 である。このグラフは 4 外平面であることが確かめられる。したがって，次の命題が成り立つ。

定理 3.1. 3 連結極大 4 外平面グラフには，2 個の完全独立全域木を持たないものが存在する。

4　まとめと今後の課題

本発表では，任意の 3 連結内部極大 2 外平面グラフは 2 個の完全独立全域木を持つこと，および 3 連結極大 4 外平面グラフには 2 個の完全独立全域木を持たないものが存在することを示した。3 連結内部極大 3 外平面グラフが 2 個の完全独立全域木を持つかどうかを明らかにすることが今後の課題である。

参考文献

[1] T. Araki, Dirac's condition for completely independent spanning trees, J. Graph Theory 77(3) (2013) 171–179.

[2] T. Hasunuma, Completely independent spanning trees in the underlying graph of a line digraph, Discrete Math. 234 (2001) 149–157.

[3] T. Hasunuma, Completely independent spanning trees in maximal planar graphs, in: Proc.28th International Workshop on Graphs-Theoretic Concepts in Computer Science, Lecture Notes in Comput. Sci.,vol. 2573, 2002, pp. 235-245.

[4] F. Péterfalvi, Two counterexamples on completely independent spanning trees, Discrete Math. 312 (2012) 808–810.

[5] L. Lovász, Combinatorial Problems and Exercises, Problem 9.55, North-Holland, 1979.