

K-007

n 連立方程式の解法について

和田 平司 平尾 由紀恵 大庭 温人 大庭 裕子
 真杉 真 池島 洋 加々見 真由美 長野 優子
 大庭 ゆづき

On The Analithis of the nth Simultaneous Eguation

Heiji Wada Yukie Hirao Haruto Ooba Yuko Ooba

Makoto Masugi hiroshi Ikejima Mayumi Kagami Yuko Nagano

Yuzuki Ooba

(所属なし)

あらまし n 連立方程式の解を求める場合、n 個の方程式を導いて、それを行列式で表す。係数の行列を A として、その逆行列 A^{-1} を求める。そして n 個の解を求める。

然し、和田、大庭らは、n 連立方程式の解を求めるのに、n 個の方程式を準備するのではなく、 $\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq eg \leq n$ の範囲の方程式 eg を用意すると n 個の値を求める事ができる。(eg は方程式での数)

キーワード…代数学 行列-行列式 教育工学

1. はじめに

小中学校では連立方程式の解を求めるのに 2 変数や 3 変数の場合の連立方程式を導き出し代入法より求める。

高校では n 連立方程式での解を求めるのに n 連立方程式を行列式で表して、n 変数の係数を行列 A で表す。

その逆行列 A^{-1} を求め、方程式の両辺に A^{-1} を掛けることにより、簡単に n 変数の解を求めるのが一般的である。

我々、和田、大庭らは n 連立方程式の場合に於いても 2 つの連立方程式から、2 変数ずつ求める。

その時の方程式の数は以下の様に求まる。

$$\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq eg \leq n$$

ここで eg は方程式の数

$\lceil \]$ は四捨五入である。

2. 本論

2-1) 一般に n 変数の連立方程式は行列式で表すと①式のように与えられる。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

変数の係数の行列を A で表すと

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \dots \textcircled{2}$$

A の行列を A⁻¹ とすると①式は③式の様に表される。

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot C \quad \dots \textcircled{3}$$

③式は④式で与えられ、変数 x は

A⁻¹ \cdot A = I より

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} \quad \dots \textcircled{4}$$

以上が高校で習う n 変数を求める n 連立方程式の解である。

2-2)和田、大庭らによる解の求め方について、2つの n 連立方程式を以下の⑤式で表すと

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \dots \textcircled{5}$$

変数の係数正ベクトル B で表すと、

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdot & \cdot & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdot & \cdot & b_{2n} \end{bmatrix}$$

で与えられ、B を行の操作により以下の様に変形できる。

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & \cdot & b'_{1j} & b'_{1j+1} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b'_{21} & \cdot & \cdot & b'_{2j} & b'_{2j+1} & b'_{2j+2} & \dots & b'_{2n} \end{bmatrix}$$

このとき C'a の値を

$$C'a = \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} \quad \text{とすると}$$

$$B' \cdot X = C'a \quad \dots \textcircled{6}$$

⑥式で与えられる。

2-3) 2 変数の場合の解の求め方

a) x + b y = c を求める解法について

b > 0、c > 0 とする

$$x \longrightarrow a$$

$$y \longrightarrow b$$

$$a : b \quad y = 1 : c \quad \dots \textcircled{6}'$$

$$b \quad y = ac$$

$$\therefore y = \frac{a}{b} c \quad \dots \textcircled{7}$$

$$1 : \frac{a}{b} c = 1 : b \quad \dots \textcircled{7}'$$

$$\frac{a}{b} c = b$$

$$\therefore a = \frac{b \cdot b}{c} \quad \dots \textcircled{8}$$

$$(\therefore a \leq 1)$$

⑧式を⑥'式に代入すると y が求まる。

$$b) ax + by = c \quad \dots \textcircled{9}$$

⑨式の両辺を a で割ると

$$x + \frac{b}{a}y = \frac{c}{a}$$

$$\therefore x + b'y = c'$$

$$(\therefore b' = \frac{b}{a}, c' = \frac{c}{a})$$

すなわち①式の形に変形できる。

3.考察

3-1)example1

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ & & \\ & & \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ \\ \\ 29 \end{bmatrix} \quad \dots\textcircled{10}$$

⑩式を変形すると

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ & & \\ & & \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ \\ \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & & \\ & & \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \\ \\ 12 \end{bmatrix} \quad \dots\textcircled{11}$$

⑪式で表される

$$\therefore X_1 + X_2 = 5 \quad \dots\textcircled{12}$$

⑥'より

$$y = 5$$

⑦'より

$$a = \frac{1}{5}$$

⑥'に a を代入すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{5} : X_2 &= 1 : 5 \\ \therefore X_2 &= 1 \\ X_1 &= 5 - 1 = 4 \end{aligned} \right\}$$

$$X_1 + 2X_2 + 2X_3 = 12 \text{ より}$$

$$4 + 2 + 2X_3 = 12$$

$$X_3 = \frac{6}{2} = 3$$

3-2)example2

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ & & & \\ & & & \\ 3 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ \\ \\ 25 \end{bmatrix} \quad \dots\textcircled{13}$$

⑬式を変形すると

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ & & & \\ & & & \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ \\ \\ 8 \end{bmatrix} \quad \dots\textcircled{14}$$

$$X_1 + 2X_2 = 8$$

⑥'より

$$y = 4$$

⑦'より

$$a = \frac{2 \times 2}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

⑥'に a を代入すると

$$\frac{1}{2} : 2X_2 = 1 : 8$$

$$\therefore 2X_2 = 4$$

$$\therefore X_2 = 2$$

$$X_1 = 8 - 4 = 4$$

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 + 2X_4 = 17 \quad \dots\textcircled{14} \text{より}$$

$$X_3 + 2X_4 = 3 \quad \dots\textcircled{15}$$

\therefore ⑥'より

$$X_4 = \frac{3}{2}$$

⑦'より

$$a = \frac{4}{3}$$

条件 $a \leq 1$ であるから

⑮式を 2 で割る

$$\frac{1}{2} \times X_3 + X_4 = \frac{3}{2} \quad \dots\textcircled{16}$$

$$\therefore X_4 + \frac{1}{2}X_3 = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a = \frac{b \times b}{c} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \frac{1}{6} : \frac{1}{2}X_3 = 1 : \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}X_3 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore X_3 = \frac{1}{2}$$

⑮式を2で割ったから 2倍する

$$X_3 = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

∴ $X_3 = 1$ を⑮式に代入する

$$\therefore 2X_4 = 3 - 1 = 2$$

$$\therefore X_4 = 1$$

∴ $(X_3 = 1, X_4 = 1)$ が求まる。

4. 結論

我々、和田、大庭らは、 n 連立方程式の解法について簡単に求める方法を見出した。

それは、2つの n 変数の方程式の係数を行列としてある操作を行う事により解が求まる。

今迄の n 変数の方程式に2つの変数を導出することにより、 n 変数の解を求めることができた。(但しある特異な場合であるが)

この場合、方程式の数は

$$\left[\frac{n}{2} \right] \leq \text{eg} \leq n$$

但し $\text{eg} = []$ は四捨五入である。

eg は式の数である。

この意味は教育工学的に考えると興味深い結果となった。

n 連立方程式の数が $\left[\frac{n}{2} \right]$ の数で n 変数を求めることができる。

残された課題として、プログラミングによって解を求めることである。

今後の課題として本論文に則って n 連立方程式を求めるプログラムを作成する課題が残っている。

参考文献

- (1) 入江著 “数学テクニカル辞典”
河合出版
- (2) 和田、その他“プログラムを用いた一次方程式の解法について”
FIT2016 P493~P500 2016
- (2) 和田、その他“新しい一次方程式の解法について”
FIT2017 P455~P460 2017