I-012

# 有理ベジエ曲線・曲面間の最短距離検出法

Detection of Minimum Distance between Rational Bezier Curves/Surfaces

西田友是
Tomoyuki Nishita
プロメテックＣＧリサーチ/デジタルハリウッド大学
nishita@shudo-u.ac.jp

## 1. はじめに

CG, C AD 分野では、曲線や曲面の処理に関して、従来交差や変形処理および描画法の研究が多くなされている. 本稿では、曲線・曲面間の隙間（ギャップ、クリアランス）の計算法について論じる. この計算は物体の配置・整理・アセンブリ及び衝突を含むアニメーションなどに有効である. n 次ベジエ曲線・曲面と点との最短距離は 2n-1 次式を解くことになり、有理曲線なら 3n-1 次式を解く必要がある. このように高次多項式を解く必要がある. 有理曲面間の最短距離検出は 4 変数となりさらに複雑となる. 本稿では Bezier clipping 法を適用し、曲線・曲面を再帰分割し、線形計算のみを利用する効率的な計算法について提案する. 基本的に高次多項式でありながらインタラクティブに処理をできる方法である. この方法は曲線/曲面間の最短距離のみでなく衝突判定や交点計算にも同一関数を利用できる統合的で効率的な方法である.

## 2. 基本的な方法（Bezier Clipping 法を利用）

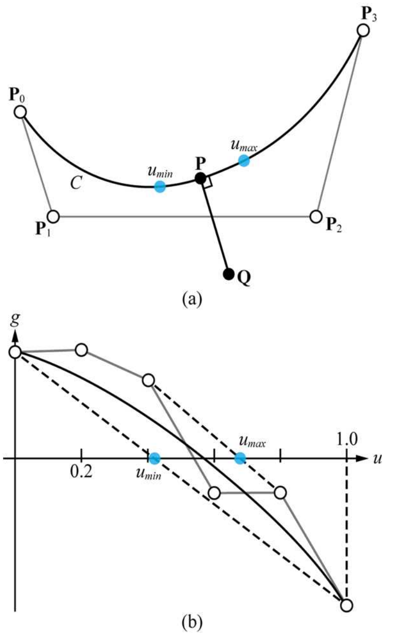



図 1　点 Q と曲線上の最短点

本稿で採用する Bezier Clipping 法は、当初曲面のレイトレーシングのために開発された[1].次の特徴がある. ①高次多項式や有理関数に適用できる. ②ロバストである. ③ニュートン法のように初期値を推測する必要がない. ③解の有無を素早くテストできる. ④高次 Bezier 関数は一次式の繰返しで解ける. また、次のものに応用されている. 多項式の解、曲線と線分との交点、直線と曲面との交差、曲線と点との最短点の抽出、有理ベジエ曲面のレイトレーシング、曲線同士の交差、平面と曲面との距離[2].

曲面同士の交点計算の前に、どの程度距離間隔があるかを検出するのが本稿の目的である.曲面間の間隔を計算するには、点と曲面、曲線（線分を含む）と曲面、曲面の内部同士の最短点の検出が必要である.また、球などの円錐曲面も扱うには有理ベジエ曲面の処理も無視できない.ベジエ曲面はパラメータ $u,v$ に関する多項式で表現されている（有理の場合は分数表記）.いずれも高次多項式であり、最短点あるいは交点を与えるパラメータの計算に尽きる.提案法は基本的に曲線・曲面の再分割により、解に収束する方法であり、分割区間は線形計算のみで抽出し、曲面の分割もデカステジョの分割を利用でき線形計算で実現できる.本稿では、曲面としての対象は有理ベジェ曲面を考える、これは, 殆どの曲面はベジェ曲面に変換できることから十分な仮定である.

## 3. 提案法

2 次元平面で説明する. 図 1(a)のように点 Q から曲線P(u)への投影関数 q(u)を考える（２つのベクトルの内積で表現される）.

$$\mathrm{q}(u) = \mathrm{P}'(\mathrm{u}) \cdot (\mathrm{P}(\mathrm{u}) - \mathrm{Q}) = H_1(u) \cdot H_2(u) \qquad (1)$$

P(x(u), y(u))の(x, y)座標は有理ベジエ関数で定義されているものとする(図 1 は非有理).点Ｐの(x, y)座標に有理ベジエ曲線の式を代入すると、パラメータ u に関する多項式(ベジエ関数)となる.

$$H_2(u) = \mathrm{P(u)} - \mathrm{Q} = \frac{\sum_{k=0}^{n} w_k(P_k) - Q) B_k^n(u)}{\sum_{k=0}^{n} w_k(u)} = \frac{d(u)}{g(u)} \qquad (2)$$

式(2) を微分、

$$H_1(u) = H'_2(u) = \frac{d\prime(u)g(u) - g\prime(u)d(u)}{g^2(u)} = \frac{\mathrm{d1(u)\text{-}d2(u)}}{g^2(u)} = \frac{\sum_{k=0}^{2n-1}(h_k^1 - h_k^2)B_k^{2n-1}(u)}{g^2(u)} \qquad (3)$$

ただし、 $d1(\mathrm{u}) = \mathrm{n}\sum_{k=0}^{n-1} w_k(P_{k+1} - P_k)B_k^n(u)\sum_{k=0}^{n} w_k B_k^n(u)$

$$d2(\mathrm{u}) = \mathrm{n}\sum_{k=0}^{n-1}(w_{k+1} - w_k)B_k^n(u)\sum_{k=0}^{n} w_k f_k B_k^n(u)$$

である.g は $2n$ -1 次と $n$ 次のベジエ関数の内積で、$3n$ -1 次のベジエ関数となる. $g(u)$=0 （分子で判定)を満たす u での最小距離は$H_2(u)$の絶対値である.図 1(b)は最短点の存在区間[$u_{min}, u_{max}$]を関数 $g$ の制御点($2n$ -1 点；有理なら $3n$ -1 点）の凸包を利用し抽出し再帰計算で解に収束する.ここで、式(1)は点 P の接線と PQ の内積が 0 になる点である（接線P′(u)に投影した長さに相当）.

（１）曲線間の最短点検出し

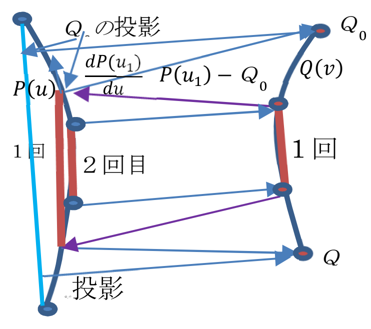



図 2　２曲線間の最短点の細分化による収束

図2に曲線Qと曲線Pとの最短点検出を示す.最短点となる条件は、曲線上の点P(*u*)と他方の曲線上のQ(*v*)を考えると、ベクトルPQが点Pの接線P'(u)と垂直で、かつQ点の接線Q'(s)とも垂直である.これは$g(u), g(v)$で*判定*する.2端点$Q_1Q_2$を曲線Pに投影した点$P_1P_2$を考える.Qに対して凸になる曲線の場合、一般に区間は短くなる.点$P_1P_2$を線分に投影すると$Q'_1$と$Q'_2$を得る（この区間は$Q_1Q_2$より短い区間）.これを繰り返すと両曲線は微小区間に収束する.例として2端点で説明したが、一方の曲線のすべての制御点に対して$g(u)$の範囲（図1中 $u_{min},u_{max}$）を算出し、これらを包含する区間で他方の曲線をクリップする.最終的に、最短点となる微小線分に収束する.区間の減少率が小さいことがあるが、その場合は曲線を2分割し、それぞれの区間で収束計算をすればいい.関数$g(u)$の制御点の全てが正（あるいは負）なら最近点は無いと判定できる.図2では一点に対する関数$g(u)$であるが、$n$次曲線Qの全制御点（すなわち$(n+1)$個）に対して$q$を算出し、各々の区間からの最小・最大値の区間を求め、この区間で曲線Pをクリップすればいい.曲線同士が交差する場合の交点も同一関数による収束計算で解ける利点がある.

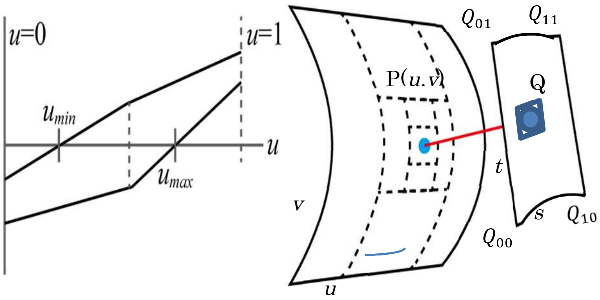



**図3　曲面間の最近点への収束**

**（2）曲面の点と他の曲面の最短距離検出**

点Qと3次元曲面内の最短点を考える.パラメータ$u$, $v$で表現されるベジェ曲面P($u$,$v$)上の$u$方向の接線ベクトルと$v$方向の接線ベクトル両方との内積で求まる.曲面の場合、関数qに相当する関数は、点$Q(x_q, y_q, z_q)$と曲面P($u$,$v$)なら、

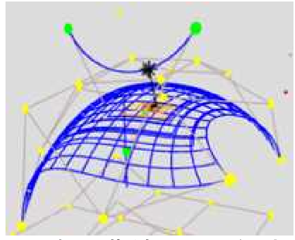
$$\frac{\partial P(u,v)}{\partial u}.(P(u,v)-Q)=0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial P(u,v)}{\partial v}.(P(u,v)-Q)=0 \tag{5}$$

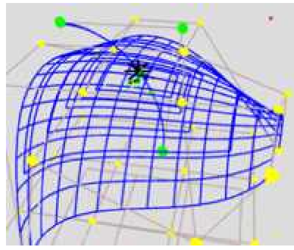
2つの連立多項式の解が極値を与える$u$，$v$である.有理曲面の場合、$(3n-1)$次のベジエ関数となる.式(4)で$u$成分の区間、式(5)で$v$成分の区間を抽出する.図3では、ある点Qに対する分割過程を示しているが、曲面Qを表現する全ての制御点に対する$q$の範囲を算出し、これらの全ての範囲を含む$u$の区間で分割し、続いて$v$成分の区間を抽出し、曲面Pを分割する.その小さくなった曲面Pの制御点を利用してQの区間を抽出し曲面Qを分割する.この操作を繰り返せば最短点を与える微小曲面に収束する.具体的には$n$次曲面なら,$u$成分に対し曲面Qの$(n+1)(n+1)$個（平面に近いなら4隅の点）の制御点に対し曲面Pの$n+1$個の$u$成分の頂点列の$q$を計算し、各$q$の$u$の範囲からPの総合的なuの区間が検出できる.なおQを含む面がほぼ平面の場合、曲面Pの再分割のみで最近点に収束する.式(4),(5)の　$(P(u,v)-Q)$はQを含む平面の法線に一致し、変数ではなくなる.すなわち、有理曲面の場合でも$(2n-1)$次の関数を用いた曲面Pのクリッピングで解に収束する.

## 4. 計算例

携帯端末など種々のプラットホームで動作できると便利であるので、JavaScript でプログラムを開発した.曲面の制御点や重み係数およびカメラ位置はマウスで指定できるインタラクティブなシステムとした.図4に提案法の計算結果を示す.図 (a)は有理曲線と有理曲面間の最短距離の検出例、(b) 有理曲線と有理曲面間の交点計算、(c)は4つの2次有理曲面で構成される半球面から有理曲面への最短点の抽出



**(a)有理曲線との最短点**



**(b)有理曲線の交差**

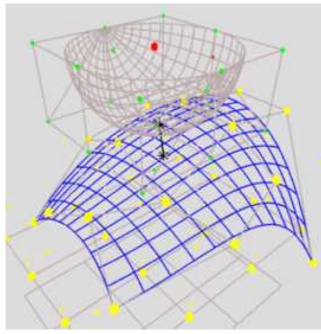


**図4 計算例(c)有理曲面同士**

## 5. おわりに

本稿では、形状設計のCADにおいて物体間（ベジェ曲面同士）の間隙（ギャップあるいはクリアランス）の検出や、ゲームなどの衝突判定に有効であることを示した.なお曲面を多角形に近似しないで計算できる方法である.$n$次ベジエ曲面（曲線）の判定関数は2n-1,3n-1次ベジエ関数で表現されているので各種判定に統合的にBezier Clipping法が適用できる.変数が複数の場合は、本来高次多項式の連立方程式を解くようであるが、幾何学的性質を用いた線形計算のみで実現できる特徴がある.

**参考文献**

[1] T. Nishita, T. Sederberg, M. Kakimoto, "Ray Tracing Trimmed Rational Surface Patches," Computer Graphics, Vol.24, No.4, pp.337-345, 1990-8.

[2] 西田,出本,「曲面と多角形との最短距離検出法」Visual Computing / グラフィクスと CAD 合同シンポジウム, 11, 2017-6.