I-011

曲線 CDR の Hausdorff 誤差の理論的上界の改善

吉村 諒‡ 徳山 豪‡
Ryo Yoshimura Takeshi Tokuyama

1. はじめに

計算機が扱える有限の精度で幾何学計算をするとき，丸め誤差による破綻が生じる．それに対する様々な対応が与えられ，LEDA や CGAL などでの計算幾何学のパッケージに組み込まれているが，理論的には精度をアドホックに変化させるというアプローチが主流である．その理由として，幾何学的な対象を有限精度の対象，すなわち整数グリッドの点集合として表すと，幾何学的な計算の土台であるユークリッド公理が成り立たない場合が存在するということがある．そのため，有限精度の世界における，公理系の成り立つ幾何学の構築が，計算幾何学においての重要なテーマの一つである．

幾何学的対象をコンピューターの画面に描画することを考える際に，ピクセルを格子点と同一視した空間に写す (これをデジタル化と呼ぶ) ものとしてモデル化する．このとき，ユークリッド幾何で満たされる性質，例えば，二直線が一点 (ピクセル空間においては入っている位相の意味での一つの連結成分) で交わるという事実が愚直な切り捨て等の離散化では満たされない．

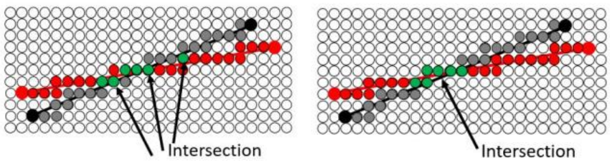

図 1 愚直な離散化 (左) と公理を満たす離散化 (右)

故に，ある種の整合性を満たすようなデジタル化を考える． $\Delta = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq n\}$，$G = \{(i,j) \mid i,j \in \{0,1,\dots,n\}, i+j \leq n\}$ とし，G には，$(i,j) \in G$ と $(k,l) \in G$ が $(k,l) \in \{(i-1,j),(i,j-1),(i+1,j),(i,j+1)\}$ であれば連結であるとするような四近傍の位相が入っているものとする．G の各点をピクセルと呼び，特に $x+y=n$ を満たすものを境界ピクセルと呼ぶ．

デジタル平面においては，直線や曲線といった幾何学的な図形はピクセルの集合としてデジタル化され，数学的に連結な幾何学図形のデジタル化は四近傍位相で連結であることが望ましい.このようなデジタル化を適切に行い，計算を矛盾なく行える公理系を与えることは，まず直線や半直線，線分などに対して理論構築され [2]，さらに半曲線族と呼ばれる，原点を通り，第一象限内で非交差な曲線群に対して拡張されている[1]. 本論文は半曲線族に対する理論 [1] を精密化し，理論的な誤差上界を大きく改善するものである．

平面上の半曲線族 F とは，原点を通る曲線の族であり，第一象限の (原点以外の) 任意の点 v に対して，その点を通る F の要素が存在して唯一であるものを意味する． 例として，原点を通る非負の傾きの直線全体の族 $\{y = ax \mid a \geq 0\}$ や原点を頂点とする放物線の族 $\{y = ax^2 \mid a \geq 0\}$ (正確にはそれぞれ y 軸 $\{x = 0\}$ も含ませる) などがある．

デジタル半曲線 S(p) は G の原点 o から p へのパスを表し，$S(o) = \{o\}$ は長さ 0 のパスとする．各点に半曲線が割り当てられているデジタル半曲線の族 $\{S(p) \mid p \in G\}$ を考える．この族が整合的 (Consistent Digital Rays; CDR)であるとは，以下の三条件を満たすことと定義する．

1. もし $q \in S(p)$ ならば，$S(q) \subset S(p)$
2. 各 S(p) に対し，境界ピクセル r であって，$S(p) \subset S(r)$であるものが少なくとも一つ存在する．
3. 各 S(p) は o から p への最短パスである．

S(p) の和集合は全域木を成す．この公理により，先ほどの二直線の交点の問題は解消される．

デジタル半曲線が対応するユークリッド線分をどの程度よく表しているかを示す指標として，Hausdorff 距離を用いる．距離空間 (X, d) 上の部分集合 P, Q 間の Hausdorff 距離は， $\max\{max_{p\in P} min_{q\in Q} d(p,q),\ max_{q\in Q} min_{p\in P} d(p,q)\}$ によって定義される．2 次元平面におけるデジタル半直線の場合には，Hausdorff 誤差 $\Theta(\log n)$ の最適な構成が知られている [2]．上記論文においては，CDR の Hausdorff 距離による誤差を，全域木から一定の規則で構築した実数列の軸に平行な長方形族に対する (幾何的) ディスクレパンシー ((geometric) discrepancy) と呼ばれる量と対応付け，discrepancy theory で古典的に知られる結果を援用している．この際， CDR とグリッドサイズに対応するサイズの順列に一対一の対応をつけることができることが示される．

本研究の着目する曲線 CDR を構築するとは，有限グリッド Δ に制限したときにありうる $n!$ 個の CDR のうち，与えられた半曲線群をできるだけ近似する順列を見つけることに相当する．半曲線群が $y = ax^2$ のように実数パラメーター a で特徴づけられ，各対角線 $x + y = k$ 上の接線の傾きが x 座標が大きくなるほど減少する場合に限定して考えると，曲線 CDR の Hausdorff 誤差は以下で説明される歪んだ領域族に対するディスクレパンシーに相当する．すなわち，曲線に対応するパラメーターが異なれば互いに交わることのない関数 $\phi_a(z)$ を等高線とする劣位集合をある z の区間に制限した領域であり，垂直線も考慮すると格子と同相の状況になっている．

2. 低 Hausdorff 誤差を実現する点列の構成

曲線 CDR が提案された [1] においては，表現したい曲線群がいかなるものであれ，Van der Corput 列によって得られる点列を用いていた．この数列は軸に平行な長方形を領域族とした時のディスクレパンシーという意味では漸近的に最適な値を達成することが古典的によく知られているが，曲線 CDR に相当する歪んだ領域族においては，必ずしも最適とはならず，また現在 $O(\sqrt{n \log n})$ の上界が示されるに留まっている．本研究では，よりディスクレパンシーの小さい点列を得るには与えられた曲線群に対し固有の調整を加える必要があると考え，discrepancy theory で知られる結果を応用してより良い漸近的な上界が確率的に保証された点列を構成するアルゴリズムを提案する．

2.1 提案アルゴリズムの概要

まず，本論文の主定理を示す．

定理　原点を通り，拡散性を持つ曲線族（論文 [1]で考察されている曲線族）において，曲線が定数次数多項式関数で定義されているとき，対応するディジタル曲線族で，整合性を持ち，Hausdorff 誤差が $O(n^{1/4}\sqrt{\log n})$ であるものが構築できる．

この結果は論文 [1] で与えられている $\mathrm{O}(\sqrt{n\log n})$ という理論的な Hausdorff 誤差の上界を大きく改善するものとなっている．厳密な証明は本論文では書ききれないが，背後にある理論を説明する．

CDR の Hausdorff 誤差の評価に直結するディスクレパンシーのことを discrepancy theory においては，幾何的ディスクレパンシーと呼ぶ．本研究ではこれとは異なる組み合わせディスクレパンシーの意味で低い値を達成する色付けの構成を経由して低幾何的ディスクレパンシーを達成する点列を構成する．ある集合とその部分集合族 (領域族) の組 (集合システム) に対し，「その領域族が台集合をいくつの互いに素な領域に分けるか」を元に双対シャッター関数と呼ばれる関数が定義される．この双対シャッター関数の漸近的な上界によって，組み合わせ的ディスクレパンシーの値の上界を得る結果が知られており，本研究はその証明に沿って上界を達成する色付けを正の確率で得る手法を提案するものである．これには与えられた領域族に属する各領域について，それが交差する辺 (2 点の集合) の数の最大値 (stabbing 数と呼ばれる) が小さいマッチングの構成が必要となる．本研究では，より一般の集合システムに対してこのようなマッチングを構成する方法を提案するが，曲線 CDR への適用を考えると，領域族が格子と同相であることを利用して，より簡略な実装が可能である．また，低組み合わせ的ディスクレパンシーを得るアルゴリズムを幾何的組み合わせ度に適用するためには，平面全体を大量の点で覆い，その点列に対する低組み合わせ的ディスクレパンシーを達成する色付けを取得し，それに基づいて点数を半分にする，という操作を繰り返すことが必要となる ([3] において Transference Lemma と呼ばれるものである).

2.2 数値実験

提案アルゴリズムを実装し，いくつかの曲線群に対して数値実験を行い，Hausdorff 誤差のグリッドサイズに対する漸近的挙動の評価を行った．今回実験したのは，2 ～ 6 次の斉次多項式による曲線群であり，グリッドサイズは $n = 2^1 \sim 2^{14}$ であり，Transference Lemma によって大量の点で覆う際の点数の 2 べきの指数は得たいグリッドサイズの指数の 1.5 倍の切り上げとした．低 stabbing マッチングを得るために，対応する歪んだ領域族が格子と同相であることを利用して，kd-tree による簡略な実装を用いた．これにより得られるマッチングの stabbing 数は $\mathrm{O}(\sqrt{n})$ であることが簡単に示され，ゆえに最終的に得られる曲線 CDR の Hausdorff 誤差は $\mathrm{O}(n^{1/4}\sqrt{\log n})$ を正の確率で達成することが保証される．数値実験によると，従来の Van der Corput 列を用いる方法と比べ，Hausdorff 誤差の値そのものは劣るものの，1/2 乗よりもやや良いオーダーを達成していることが確認された．また，斉次多項式の指数によって挙動の変化は特に観察されなかった．

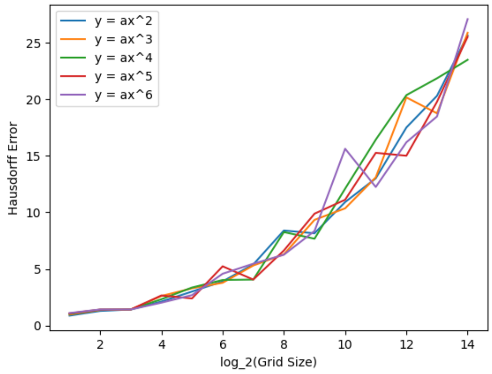

図 4 提案手法のグリッドサイズの対数に対する Hausdorff 誤差

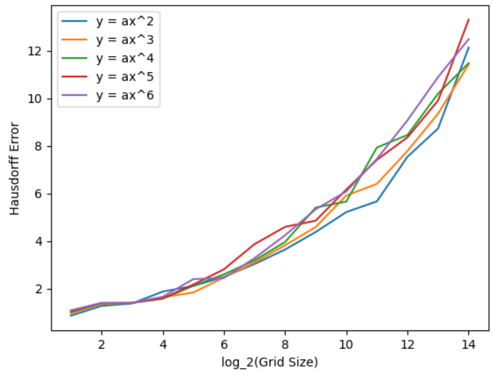

図 5 Van der Corput 列を用いる従来の手法の Hausdorff 誤差

3. おわりに

本研究では，discrepancy theory で知られる結果をもとに，より良い Hausdorff 誤差の漸近的上界が確率的に保証された点列を構成するアルゴリズムを提案した．数値実験により，予測される漸近的挙動を達成しているものと考えられる．また，一般の領域族に対し低 stabbing マッチングを構成する手法も提案した．

謝辞

本研究は科学研究費基盤(B)「離散的な空間における整合的な計算幾何学の構築（20H04143)」の支援を受けている．

参考文献

[1] J. Chun, K. Kikuchi, and T. Tokuyama. Consistent digital curved rays and pseudoline arrangements. In 27th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2019). Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2019.

[2] J. Chun, M. Korman, M. N¨ollenburg, and T. Tokuyama. Consistent digital rays. Discrete & computational geometry, 42(3):359–378, 2009.

[3] J. Matouˇsek. Geometric discrepancy: An illustrated guide, volume 18. Springer Science & Business Media, 2009.