

セルオートマトンのベクトル表現を用いた多種の車が混在する交通流モデルの解析
 Analysis of Traffic Flow Model with Multiple Kinds of Vehicles
 by the Vector Representation of Cellular Automata

西田 優樹[†] 渡邊 扇之介[‡] 渡邊 芳英[†]
 Yuki Nishida Sennosuke Watanabe Yoshihide Watanabe

1 はじめに

数理モデルによる交通流の解析として、セルオートマトン (Cellular Automata, CA) を用いた研究が広く行われている。最も基本的なモデルは Wolfram の ECA (Elementary Cellular Automata) ルール 184 [1] を用いたものであり、これを改良することによってさまざまなモデルが開発されてきた [2, 3]。また、一度停止した車はすぐには再発進できないという慣性の効果を取り入れたスロースタートモデル [4] は、メタ安定分岐といわれる現実の交通流で生じる事象を再現するモデルとして知られている。このメタ安定分岐とは、道路全体に占める車の割合が同じであっても、車の間隔の空け方によって渋滞が生じる場合とそうでない場合があることを意味しており、最適な交通制御への応用が期待されている。本講演では、スロースタートモデルを改良し、多種の車が混在するような交通流を CA を用いて定式化する。提案するモデルでは、トラックのように加速が遅くスロースタート効果を持つ車と、普通車のようにすぐに発進できるスロースタート効果を考慮しない車の 2 種類を考え、これらの混合割合が渋滞の発生に及ぼす影響を解析する。

また、離散値の CA から連続値の CA を導く手法としてファジー化があり [5]、最近になってファジー化された ECA ルール 184 の交通流モデルへの応用も研究されている [6]。ECA は 2 値の CA であるのに対して、スロースタートモデルのようなより現実の交通流に近いモデルは 3 値以上の CA で実現されることが多く、従来の整数値の CA で考える限りにおいてはファジー化は容易ではない。筆者らはこの点を解決するために、3 値以上の CA を整数値ではなくベクトル値で表現することでファジー化する手法を提案している [7]。本講演では CA のベクトル値表現を通したファジー化をスロースタートモデルおよび多種の車が混在するモデルに適用し、交通密度と流量の関係を表した基本図をファジー化の前後で比較する。

2 ECA ルール 184 と交通流モデル

2.1 ECA の定義

1 次元 CA とは、1 列に並んだセルの配列が、その値を各セルの近傍の値に依存して更新することで時間発展する力学系である。特に、とり得る値の集合が $\{0, 1\}$ で、セル $i \in \mathbb{Z}$ の近傍が $\{i-1, i, i+1\}$ であるような 2 値 3 近傍 CA を ECA という。時刻 t におけるセル i の値を x_i^t で表すとき、ECA の時間発展は局所遷移関

数 $f: \{0, 1\}^3 \rightarrow \{0, 1\}$ によって

$$x_i^{t+1} = f(x_{i-1}^t, x_i^t, x_{i+1}^t)$$

として決定される。集合 $\{0, 1\}^3$ から $\{0, 1\}$ への写像は全部で $2^3 = 256$ 個あり、したがって ECA の局所遷移関数は 256 通り存在する。ECA の局所遷移関数 f は表 1 に示すルール表によってあらわすことができる。表 1 において、上の行が x, y, z の値の組、下の行が $f(x, y, z)$ の値を表している。このときの数字の並び $a_7 a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0$ を 8 桁の 2 進数とみて、これを 10 進数に変換したものを局所遷移関数 f をもつ ECA のルール番号という。例えば $a_7 a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0 = 10111000$ として得られる ECA のルール番号は 184 であり、この ECA を簡単に ECA ルール 184 という。

表 1: ECA のルール表

111	110	101	100	011	010	001	000
a_7	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0

2.2 ECA ルール 184 によるモデル化

さて、CA を用いた交通流モデルとして有名な、ECA ルール 184 によるモデル化を紹介しよう。一車線の環状道路を L 個の区画に分け、それぞれの区画に番号 $1, 2, \dots, L$ を順に対応させる。1 つの区画には最大で 1 台の車が存在し、離散的な時間ステップとともに車が移動する。最も単純なルールとして、それぞれの車は 1 つ先の区画が空いているときに進み、空いていないときにはその場にとどまるというものが考えられる。このとき区画とセルを対応させ、時刻 t で区画 i に車が存在するときに $x_i^t = 1$ 、車が存在しないときに $x_i^t = 0$ とし、 $x_i^t = x_{i+L}^t$ として周期 L の周期境界条件を課すと、この交通流は ECA ルール 184 によってモデル化できる。値 0 を白、値 1 を黒と対応させたときの ECA184 の時間発展を図 1 に示す。

さて、図 1 において連続して値が 1 であるセルの並ぶ部分では渋滞が発生しているとみなすことができ、左の図では渋滞が時間とともに解消されるが右の図では渋滞は解消されずに残り続ける。このような渋滞の有無は基本図によって確認することもできる。道路上の車の総数を道路の区画数 L で割ったものを密度といい、時刻 t から時刻 $t+1$ にかけて実際に移動した車の数を道路の区画数 L で割ったものを流量という。また、横軸を密度、縦軸を流量とするグラフを基本図という。交通流を ECA ルール 184 によってモデル化したとき、十分時間が経過した後では基本図は図 2 の黒の実線のようなになる [8]。グラフが右上がりとなる箇所 (自由走行相という) では渋滞が解消されており、右下がりとなる箇所 (渋滞相という) では渋滞が解消されずに残っ

[†]同志社大学 Doshisha University

[‡]福知山公立大学 The University of Fukuchiyama

ていると判断できる。そのため、ECA ルール 184 によるモデル化では、密度が $1/2$ 以下の場合に渋滞が解消されることがわかる。

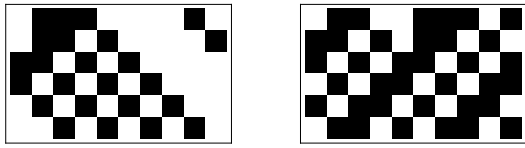


図 1: ECA ルール 184 の時間発展

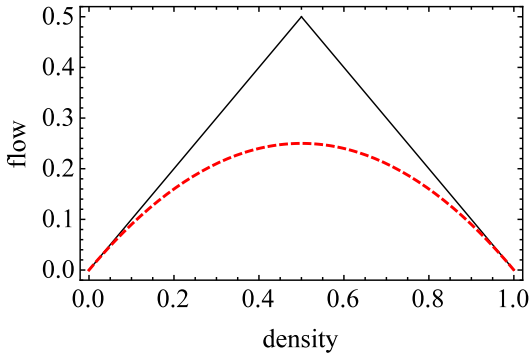


図 2: ECA ルール 184 (黒, 実線) および EFCA ルール 184 による交通流モデル (赤, 破線) の基本図

2.3 ECA のファジー化

次に, Cattaneo et al. [5] による ECA のファジー化について説明する. ECA の局所遷移関数 f が表 1 で与えられたとき, 関数 $f: \{0,1\}^3 \rightarrow \{0,1\}$ は

$$f(x, y, z) = a_7xyz + a_6xy\bar{z} + a_5x\bar{y}z + a_4x\bar{y}\bar{z} + a_3\bar{x}yz + a_2\bar{x}y\bar{z} + a_1\bar{x}\bar{y}z + a_0\bar{x}\bar{y}\bar{z} \quad (2.1)$$

と多項式で表示することができる. ただし, $\bar{x} = 1 - x, \bar{y} = 1 - y, \bar{z} = 1 - z$ である. 例えば, ECA184 の局所遷移関数は

$$f(x, y, z) = x - xy + yz$$

と表示できる. 関数 f の定義域を式 (2.1) の右辺の多項式を通して $[0, 1]^3$ に拡張した関数 \hat{f} は, $\hat{f}([0, 1]^3) \subset [0, 1]$ を満たす. よって, セルのとる値の集合を 2 元集合 $\{0, 1\}$ から閉区間 $[0, 1]$ へと拡張した CA を考えることができる. こうして得られる $\hat{f}: [0, 1]^3 \rightarrow [0, 1]$ を局所遷移関数に持つ CA を EFCA (Elementary Fuzzy Cellular Automata) といい, また一般にこのような手続きを経て離散値の CA から連続値の CA を得ることを CA のファジー化という. ECA ルール 184 をファジー化して得られる EFCA を EFCA ルール 184 と呼ぶ. EFCA ルール 184 の漸近挙動について, 周期 L が奇数のときには一様な配列に収束し, 周期 L が偶数のときには周期 2 の配列に収束することが数学的に示されている [9]. EFCA ルール 184 によるモデル化は, 交通流としては各区画に 1 台の車が入るのではなく, 区画ごとの車の密度を考えていることに相当する. そのため, 全体で

の密度は $(\sum_{i=1}^L x_i^t)/L$, 流量は $(\sum_{i=1}^L x_i^t(1 - x_{i+1}^t))/L$ と定義でき, 周期が奇数の場合の EFCA ルール 184 の基本図は漸近的に図 2 の赤の破線に示す形になる [6].

3 スロースタートモデル

3.1 3 値 3 近傍 CA による定式化

ECA ルール 184 による交通流モデルを改良して, 停止した車の再発進に慣性の効果を取り入れたスロースタートモデルが知られている [4]. ECA184 によるモデルでは, 一度停止した車は先行車が発進するとその次の時刻ですぐに発進できる. 一方で, スロースタートモデルにおいては先行車の発進に気づいてから実際に自車を発進させるまでにはラグが存在すると仮定し, 一度停止した車は先行車の発進から 2 時刻後に再発進すると仮定している. 0 がこれまでどおり車が存在しない区画を表し, 1 が一度停止してすぐには発進できない車, 2 が現在走行中あるいは次時刻での発進準備ができていない車を表すとすると, スロースタートモデルは局所遷移関数 $f: \{0, 1, 2\}^3 \rightarrow \{0, 1, 2\}$ が表 2 で与えられる 3 値 3 近傍 CA でモデル化できる [10]. この 3 値 3 近傍 CA の時間発展を図 3 の左に, 十分時間が経過した後の基本図を図 4 の黒の実線に示す. 基本図において密度が $1/3$ 以上 $1/2$ 以下の部分では自由走行相と渋滞相が混在し, このときに渋滞が解消するかどうかは初期の密度だけでなく車の配置に依存する [4]. このような現象をメタ安定分岐といい, 現実の交通流においても観測される事象である [11].

表 2: スロースタートモデルのルール表

222	221	220	212	211	210	202	201	200
1	1	0	1	1	2	2	2	2
122	121	120	112	111	110	102	101	100
1	1	0	1	1	2	0	0	0
022	021	020	012	011	010	002	001	000
1	1	0	1	1	2	0	0	0

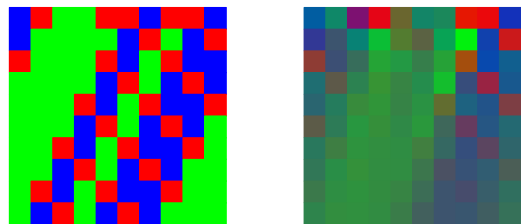


図 3: スロースタートモデル (左) とそのファジー化 (右) の時間発展. 2 が赤, 1 が緑, 0 が青に対応する.

3.2 3 値 3 近傍 CA のファジー化

次に, ECA の場合と同様に 3 値 3 近傍 CA のファジー化を考えよう. ECA の場合とは異なり, 局所遷移関数の多項式表現をそのまま用いても 3 値 CA をファジー化することはできないが, 筆者らは CA の各セルがとる整数値 $0, 1, 2$ を 3 つの独立なベクトル値へ取り替えることで 3 値 3 近傍 CA のファジー化を実現した [7]. ここではより一般に q 値 3 近傍 CA の場合についてこ

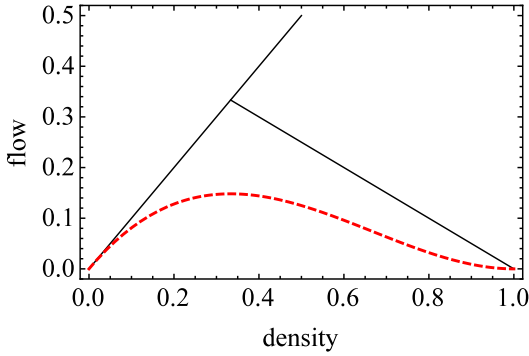


図 4: スロースタートモデル (黒, 実線) とそのファジー化 (赤, 破線) の基本図

の手法を紹介する。まず, e_1, e_2, \dots, e_q を \mathbb{R}^q の基本ベクトルとし, $(q-1) \mapsto e_1, (q-2) \mapsto e_2, \dots, 0 \mapsto e_q$ としてもとの整数値と対応させる。このとき q 値 3 近傍 CA の値の集合は $Q_q = \{e_1, e_2, \dots, e_q\}$ であり, 局所遷移関数 f は自然に Q_q^3 から Q_q への写像とみなすことができる。こうして得られる q 値 3 近傍 CA のベクトル表現において, 局所遷移関数 f は

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{pmatrix} \sum_{f(e_j, e_k, e_\ell) = e_1} x_j y_k z_\ell \\ \sum_{f(e_j, e_k, e_\ell) = e_2} x_j y_k z_\ell \\ \vdots \\ \sum_{f(e_j, e_k, e_\ell) = e_q} x_j y_k z_\ell \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

と表せる。ただし, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_q)^\top$ などである。ここで,

$$\Delta_q = \{(x_1, x_2, \dots, x_q)^\top \mid \sum_{j=1}^q x_j = 1, x_j \geq 0\}$$

とし, 関数 f の定義域を式 (3.1) の右辺によって Δ_q^3 に拡張したものを \tilde{f} とすると $\tilde{f}(\Delta_q^3) \subset \Delta_q$ が成り立つ。よって, ベクトル表現された q 値 3 近傍 CA を, セルのとる値の集合が $(q-1)$ 次元単体 Δ_q , 局所遷移関数が $\tilde{f}: \Delta_q^3 \rightarrow \Delta_q$ である CA へとファジー化できる。

3.3 スロースタートモデルのファジー化

スロースタートモデルを表す 3 値 3 近傍 CA のベクトル表現を考えると, 局所遷移関数 f は

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{pmatrix} y_2 z_3 + x_1 y_3 \\ (1 - y_3)(1 - z_3) \\ y_1 z_3 + (1 - x_1) y_3 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

と表せる。この式から得られるスロースタートモデルのファジー化は, 交通流モデルとしても妥当な解釈を与える。例えば, 式 (3.2) の第 1 成分において, 第 1 項 $y_2 z_3$ は区画 i の完全に停止した車のうち, 1 つ先の区画の空き割合のぶんが次の時刻で発進準備が整うことを表しており, 第 2 項 $x_1 y_3$ は区画 $i-1$ を走行中あるいは発進可能な車のうち, 区画 i の空き割合のぶんが次の時刻で実際に区画 i に移動することを表している。ファジー化されたスロースタートモデルの時間発展を図 3 の右に示す。ただし, e_1 が赤, e_2 が緑, e_3 が青に対応し, Δ_3 上の点を RGB カラーで表現する。

スロースタートモデルをファジー化した CA の時間発展において, 数学的な証明はできていないが, 十分時間が経過したのちに一樣な配列, すなわちすべてのセルが同じベクトルをとる配列に収束することがシミュレーションにより確かめられる。一樣な不動点において基本図を描くと図 4 の赤の破線になる。もとのスロースタートモデルの基本図と比較するとメタ安定分岐は確認できないものの, メタ安定分岐が開始する密度とファジー化したモデルで流量が最大となる密度とがともに $1/3$ となっている。

4 多種の車が混在する交通流

本節ではスロースタートモデルを改良し, スロースタート効果を持つ車とそうでない車が混在する交通流を考える。これは例えば, トラックのような発進に時間がかかる車とすぐに発進できる普通車が混在する状況に対応している。この交通流をモデル化するために 4 値 3 近傍 CA を導入しよう。ベクトル表現を考え, e_1 をスロースタート効果を持たない, すなわち前の区画が空いていればすぐに進む車, e_2, e_3 をスロースタート効果を持つ車とし, e_2 が走行中あるいは次時刻での発進準備ができていない状態を, e_3 が一度停止してすぐには発進できない状態を表すとする。さらに, e_4 は車が存在しない区画を表すとする。このとき, 2 種類の車が混在する交通流モデルは局所遷移関数が表 3 で与えられる 4 値 3 近傍 CA で定式化できる。ただし, スペースの都合上 f の値のみを $f(e_1, e_1, e_1)$ から $f(e_4, e_4, e_4)$ まで順に並べた。局所遷移関数 f は式 (3.1) により

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{pmatrix} x_1 y_4 + y_1(1 - z_4) \\ x_2 y_2 + y_3 z_4 \\ (y_2 + y_3)(1 - z_4) \\ (x_3 + x_4) y_4 + (y_1 + y_2) z_4 \end{pmatrix}$$

と表すことができる。この式から得られる 4 値 3 近傍 CA のファジー化もスロースタートモデルの場合と同様に, もとの離散値の交通流モデルの連続化として妥当な解釈を与える。2 種類の車が混在する交通流モデルについて, (離散値の) 4 値 3 近傍 CA によるモデルとそのファジー化の時間発展を図 5 に示す。ただし, e_1 が赤, e_2 が緑, e_3 が青, e_4 が黒に対応し, $(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top \in \Delta_4$ を $(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ に写して RGB カラーで表現する。

表 3: 4 節で扱う 4 値 3 近傍 CA のルール表

$e_1 e_1 e_1 e_4$	$e_3 e_3 e_3 e_4$	$e_3 e_3 e_3 e_2$	$e_1 e_1 e_1 e_1$
$e_1 e_1 e_1 e_4$	$e_3 e_3 e_3 e_4$	$e_3 e_3 e_3 e_2$	$e_2 e_2 e_2 e_2$
$e_1 e_1 e_1 e_4$	$e_3 e_3 e_3 e_4$	$e_3 e_3 e_3 e_2$	$e_4 e_4 e_4 e_4$
$e_1 e_1 e_1 e_4$	$e_3 e_3 e_3 e_4$	$e_3 e_3 e_3 e_2$	$e_4 e_4 e_4 e_4$

この 4 値 3 近傍 CA のファジー化においても, 数学的な証明はできていないものの, 十分時間が経過したのちには一樣な配列に収束することがシミュレーションにより確かめられる。一樣な不動点 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*, \dots, \mathbf{x}^*)$ の密度は $(1 - x_4^*)$ である。また後ろのセルからの流入がない状況を考えて $f(e_4, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ の最後の成分は $y_4 + (y_1 + y_2) z_4$ なので, 不動点での流量は $(x_1^* + x_2^*) x_4^*$ である。さらに $x_2^* = (1 - x_1^* - x_4^*) x_4^*$, $x_3^* = (1 - x_1^* - x_4^*)(1 - x_4^*)$

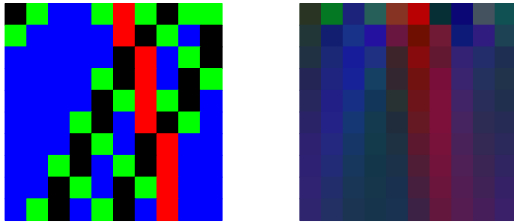


図 5: 4 値 3 近傍 CA によるモデル (左) とそのファジー化 (右) の時間発展

が成り立つ。よって、車の密度を ρ 、すべての車の中に占めるスロースタート効果を持たない車の割合を α とすると、一様な不動点での流量は $\rho(1-\rho)(1-\rho+\rho\alpha)$ となり、基本図は図 6 となる。また、 α を 0.1 刻みで動かしたときの、離散値のモデルでメタ安定分岐が生じる密度 ρ_d とファジー化したモデルで流量が最大となる密度 ρ_f の比較を表 4 に示す。ただし、 ρ_d の値はシミュレーションによる実験値であり、 ρ_f の値は一様な不動点での理論値である。この結果から、離散値のモデルのほうがスロースタート効果を持つ車による交通の抑制効果が強いことがわかる。

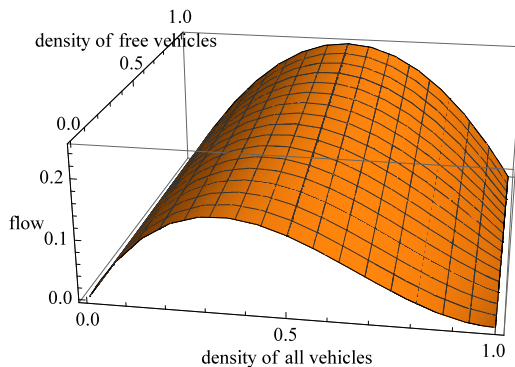


図 6: 4 値 3 近傍 CA によるモデルをファジー化して得られる基本図

表 4: α の値による ρ_d と ρ_f の変化

α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	...
ρ_d	0.346	0.358	0.370	0.384	0.398	...
ρ_f	0.350	0.368	0.386	0.405	0.423	...
			0.6	0.7	0.8	0.9
	...		0.416	0.435	0.454	0.476
			0.440	0.457	0.472	0.487

5 まとめ

本講演では、慣性を取り入れた交通流モデルであるスロースタートモデルを改良し、スロースタート効果を持つ車と持たない車の 2 種類が混在する交通流モデルを 4 値 3 近傍 CA を用いて定式化した。このモデルにおいてスロースタート効果を持たない車の割合を変化させて基本図を描くことにより、ECA184 によるモデルからスロースタートモデルへの遷移の様子が観察できる。また、スロースタートモデル及び提案モデル

を CA のベクトル表現を通してファジー化することにより、離散値の場合と連続値の場合との基本図の比較を行った。本講演で紹介した CA のベクトル表現およびそのファジー化は任意の状態数あるいは近傍数の CA に適用可能な汎用性のあるものであり、取り上げた 3 値 4 近傍 CA によるモデルに限らずさまざまな CA によるモデルを統一的に解析できるようになることが期待される。

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP21K03359 の助成を受けたものです。

参考文献

- [1] Wolfram, S.: *Cellular Automata and Complexity: Collected Papers*, Westview Press (1994).
- [2] Nagel, K., Schreckenberg, M.: A cellular automaton model for freeway traffic, *Journal de Physique I France*, 2, 2221–2229 (1992).
- [3] Nishinari, K., Takahashi, D.: A new deterministic CA model for traffic flow with multiple states, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 32, 93–104 (1999).
- [4] Takayasu, M., Takayasu, H.: $1/f$ noise in a traffic model, *fractals*, 1, 860–866 (1993).
- [5] Cattaneo, G., Flocchini, P., Mauri, G., Quaranta Vogliotti, C., Santoro, N.: Cellular automata in fuzzy backgrounds, *Physica D*, 105, 105–120 (1997).
- [6] Higashi, K., Satsuma, J., Tokihiro, T.: Rule 184 fuzzy cellular automaton as a mathematical model for traffic flow, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 38, 579–609 (2021).
- [7] Nishida, Y., Watanabe, S., Fukuda, A., Watanabe, Y.: q -VFCA: q -state Vector-valued Fuzzy Cellular Automata, *Journal of Cellular Automata*, 15, 207–222 (2020).
- [8] Fukás, H.: Solution of the density classification problem with two cellular automata rules, *Physical Review E*, 55, R2081–2084 (1997).
- [9] Betel, H., Flocchini, P.: On the asymptotic behaviour of circular fuzzy cellular automata, *Journal of Cellular Automata*, 6, 25–52 (2011).
- [10] Chowdhury, D., Ghosh, K., Majumdar, A., Sinha, S., Stinchcombe, R.B.: Particle-hopping models of vehicular traffic: Distributions of distance headways and distance between jams, *Physica A*, 246, 471–486 (1997).
- [11] Nishinari, K., Fukui, M., Schadschneider, A.: Cellular automaton models for traffic flow and metastability, *IFCA Proceedings Volumes*, 36, 341–346 (2003).