

ネットワーク上のテナント付き住宅割当問題のための 耐戦略的アルゴリズム

Strategy-Proof Algorithm for House Allocation with Existing Tenants over Social Networks

尤 博*

Bo You

東藤 大樹*

Taiki Todo

横尾 真*

Makoto Yokoo

1 序論

マルチエージェントシステム分野における合意形成のための基礎理論として、ゲーム理論をベースに、エージェントの望ましい行動を引き出すメカニズムデザインに関する研究が注目を集めて久しい。具体的な応用事例として、正直な入札を行うインセンティブを与えるオークションメカニズムの研究や、正直な選好の表明を行うインセンティブを与えるマッチング/交換メカニズムの研究などがある。このように、適切なインセンティブを与えるメカニズムのことを、耐戦略的(strategy-proof)なメカニズムと呼ぶ。近年では、耐戦略的メカニズムの性能をアルゴリズム理論の観点から分析する、アルゴリズム的ゲーム理論(Algorithmic Game Theory)と呼ばれる研究分野が確立し、ミクロ経済学・理論計算機科学・人工知能の融合領域として盛んに研究が進められている [5]。

メカニズムに参加するエージェントがソーシャルネットワーク上に分布しているケースを考える。このとき、メカニズムデザインが各エージェントから引き出すべき望ましい行動として、選好の正直な表明に加え、メカニズムに関する情報を、秘匿することなく、全ての隣接エージェントへ伝達すること、が考えられる [4, 2]。Li ら [4, 2] は、ネットワーク上のオークションにおいて、耐戦略的な、すなわち、正直な入札と情報伝達の両方のインセンティブを与えるオークションメカニズムの設計に成功した。また、Kawasaki ら [2] は、複数の同質な財をネットワーク上で販売するオークションのための、耐戦略的なメカニズムを提案した。

金銭の譲渡(すなわち、買い手による支払い)を伴うオークションと比較すると、マッチングや物々交換など、金銭の譲渡を伴わない資源配分においては、耐戦略的メカニズムの設計はより困難になる。Kawasaki ら [3] は、ネットワーク上の交換問題に関して、パレート効率性、個人合理性、及び耐戦略性を同時に満足するメカニズムが存在しないことを示したほか、従来の

交換問題のための耐戦略的なメカニズムであるトップトレーディングサイクル (Top-Trading-Cycles, TTC) メカニズム [6] の、ネットワーク上での性能を分析した。

交換問題に関する別の拡張として、テナント付き住宅割当問題 (house allocation with existing tenants) [1] がある。各エージェントが一つの非分割財(例えば住宅)を予め所有し、財の交換によって全体の幸福度の向上を目指す従来の交換問題に対し、テナント付き住宅割当問題では、予め一つの住宅を所有しているテナント (tenant) と、初期状態では住宅を所有していない新規エージェント (newcomer) の2種類のエージェントが存在する。また、各エージェントが最終的に一つの住宅を入手できるだけの、十分な空き部屋も存在する。Abdulkadiroglu ら [1] は、TTCの拡張として、You-Request-My-House I-Get-Your-Turn メカニズム (YRMH-IGYT) を提案した。

本研究では、Abdulkadiroglu らの YRMH-IGYT メカニズムをネットワーク上のテナント付き住宅割当問題に適用し、耐戦略性を満足するための条件を吟味する。具体的には、YRMH-IGYT メカニズムのネットワーク上での実装を定義し、その際に必要なエージェント間の優先順位について、耐戦略性を保証するために、ネットワーク上での主催者からの距離に基づいて決定する方法を提案する。

2 モデル

本章では、本論文で扱うネットワーク上のテナント付き住宅割当問題のモデルを示す。 $A_E = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ を、住宅 (house) を予め保有するエージェント (テナント, tenant) の集合とする。また、 $H_O = \{o_1, o_2, \dots, o_k\}$ を、予め保有された住宅の集合とする。各テナント e_i が予め所有する住宅は o_i で表される。一方、 $A_N = \{a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n\}$ を、初期状態に置いて住宅を保有していないエージェント (新規エージェント) の集合とする。また、 $H_V = \{h_{k+1}, h_{k+2}, \dots, h_n\}$ を、空き住宅の集合とする。ここで、簡単のため、空き住宅の個数は

*九州大学大学院システム情報科学府

新規エージェントの個数と同一であると仮定していることに注意されたい。集合 $A := A_E \cup A_N$ をエージェントの集合、集合 $H := H_O \cup H_V$ を住宅の集合と定める。また、特別なエージェントとして主催者エージェント s を導入し、便宜上、空き住宅 H_V は主催者エージェントの所有財であるとする。割当 $m = (m_a)_{a \in A}$ は、 A と H との1対1対応であり、 $m_a \in H$ は、割当 m の下でエージェント a が割り当てられる住宅を示す。

各エージェントは、住宅、ならびに住宅を割り当てられないという事実に対して、選好 (preference) を持つ。ここで、住宅を割り当てられないという事実を記号 \emptyset で表すとすると、エージェント a の選好 $\succ_a \in \Pi$ は集合 $H \cup \{\emptyset\}$ 上の二項関係として定義される。選好の集合ノドメインを記号 Π で表す。各エージェント $a \in A$ の選好 \succ_a は、エージェント a の個人情報であり、主催者エージェントを含む他のエージェントによって観測されることはない。本研究では、選好は厳密 (strict) であると仮定する。すなわち、任意の2つの住宅について、各エージェントは厳密に優劣をつけることができるものとする。例えば2つの住宅 h, h' について、 $h \succ_a h'$ が成り立つとき、この選好 \succ_a を持つエージェントは住宅 h を住宅 h' より厳密に好む。また、任意の新規エージェント $a \in A_N$ と任意の住宅 $h \in H$ について、 $h \succ_a \emptyset$ であると仮定する。すなわち、新規エージェントは、任意の住宅を割り当てられることを拒否しない。さらに、 $h \succsim_a h'$ と書いたときには、選好 \succ_a を持つエージェントが住宅 h を住宅 h' より厳密に好むか、あるいは $h = h'$ のいずれかであることを表す。

また、各エージェント $a \in A \cup \{s\}$ は、自分のフォロワの集合 $r_a \subset A \setminus \{a\}$ を持つ。ここで、エージェント同士のフォロワ関係は非対称であることを許す。すなわち、 $b \in r_a$ かつ $a \notin r_b$ なるエージェントの組 (a, b) が存在してもよい。主催者エージェント s を除く各エージェント $a \in A$ について、フォロワの集合 r_a もまたエージェント a の個人情報であるとする。エージェントの集合 $A \cup \{s\}$ と、各エージェントのフォロワの集合の組 $(r_a)_{a \in A \cup \{s\}}$ によって、ソーシャルネットワーク $G(V, E)$ は以下のように有向グラフとして定義される：

$$\begin{aligned} V &:= A \cup \{s\} \\ E &:= \{(x, y) \mid \forall x \in A \cup \{s\}, \forall y \in r_x\} \end{aligned}$$

ネットワーク上のテナント付き住宅割当問題は以下のように定義される。各エージェント $a \in A$ は、タイプ $\theta_a = (\succ_a, r_a)$ を個人情報として持つ。また、真のタイプ $\theta_a = (\succ_a, r_a)$ をもつエージェント $a \in A$ が申告可能なタイプ $\theta'_a = (\succ'_a, r'_a)$ は、必ず $r'_a \subseteq r_a$ を満たす。すなわち、自分のフォロワでないエージェントを、自分のフォロワであると偽ることはできない。真

のタイプ θ_a を持つエージェントが申告可能なタイプの集合を $R(\theta_a)$ で表す。記号 $\theta' = (\theta'_a)_{a \in A} \in R(\theta)$ で、真のタイプの組が θ であるようなエージェントの集合 A によって申告されたタイプの組を表す。また、記号 $\theta'_{-a} = (\theta'_b)_{b \in A \setminus \{a\}} \in R(\theta_{-a})$ で、 a 以外のエージェントによって申告されたタイプの組を表す。住宅割当メカニズム f は、任意の申告されたタイプのプロファイル θ' を、割当 m へ対応付ける関数である。住宅割当メカニズム f による、プロファイル θ' に対する割当を $f(\theta')$ と表し、割当 $f(\theta')$ の下でエージェント $a \in A$ へ割り当てられる住宅を $f_a(\theta')$ と表す。

住宅割当メカニズムが有すべき性質として、耐戦略性 (strategy-proofness)、個人合理性 (individual rationality)、およびパレート効率性 (Pareto efficiency) に着目する。

定義 1 (耐戦略性). ある住宅割当メカニズム f が耐戦略性を満たすとは、以下が成立することをいう：

$$\forall a \in A, \forall \theta_{-a}, \forall \theta'_{-a} \in R(\theta_{-a}), \forall \theta_a, \forall \theta'_a \in R(\theta_a), \\ f_a(\theta_a, \theta'_{-a}) \succsim_a f_a(\theta'_a, \theta'_{-a}).$$

すなわち、他者の申告するタイプの組 θ'_{-a} に依らず、真のタイプ θ_a を申告することが各エージェント $a \in A$ の弱支配戦略となる。

定義 2 (個人合理性). ある住宅割当メカニズム f が個人合理性を満たすとは、以下が成立することをいう：

$$\forall a \in A_E, \forall \theta_{-a}, \forall \theta'_{-a} \in R(\theta_{-a}), \forall \theta_a, \\ f_a(\theta_a, \theta'_{-a}) \succsim_a o_a.$$

すなわち、各テナント $a \in A_E$ にとって、真のタイプ θ_a を正直に申告することで、初期保有の住宅 o_a より厳密に劣る住宅を割り当てられて損をすることはない。

定義 3 (パレート効率性). ある割当 m が別の割当 m' をパレート支配するとは、全てのエージェント $a \in A$ について $m_a \succsim_a m'_a$ が成立し、かつ少なくとも一人のエージェント $b \in A$ について $m_b \succ_b m'_b$ が成立することをいう。任意の θ について、住宅割当メカニズム f が返す割当 $f(\theta)$ が、別の任意の割当 m によってパレート支配されないとき、住宅割当メカニズム f はパレート効率的であるという。

3 提案アルゴリズム

本章では、YRMH-IGYT メカニズムをベースとして、ネットワーク上のテナント付き住宅割当問題のために我々が提案したメカニズムである、YRMH-IGYT for Social Network (YI-SN) の定義を示す。

Algorithm 1 YI-SN**Require:** $\triangleright, A, H, \theta'$ **Ensure:** m

```

1: while  $|\triangleright| > 0$  do
2:    $a^* \leftarrow \triangleright_1$ 
3:   Find  $h^* \in H$  s.t.  $\forall h \in H \setminus \{h^*\}, h^* \succ_a h$ 
4:   if  $h^* \in H_V$  then
5:      $m_{a^*} \leftarrow h^*$ 
6:      $A \leftarrow A \setminus \{a^*\}, H \leftarrow H \setminus \{h^*\}, \triangleright \leftarrow \triangleright \setminus \{a^*\}$ 
7:   else
8:     Let  $a^*$  points to  $h^*$ 
9:     if there is no pointing loop formed then
10:      Find tenant agent  $a$  of house  $h^*$ 
11:      Put  $a$  on the top of  $\triangleright$ , i.e.,  $\triangleright_1 = a$ 
12:     else
13:      Let  $L$  be the set of agents in the loop
14:      Let  $h_b$  be the house that  $b$  points to
15:       $m_b \leftarrow h_b$ 
16:      for  $b \in L$  do
17:         $A \leftarrow A \setminus \{b\}, H \leftarrow H \setminus \{h_b\}$ 
18:         $\triangleright \leftarrow \triangleright \setminus \{b\}$ 
19:      end for
20:     end if
21:   end if
22: end while

```

まず準備として、エージェントの順序 \triangleright を導入する。エージェントの順序 \triangleright は、エージェントの集合 A 上の線形順序であり、二項関係として表現される。与えられた順序 \triangleright の下で $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ 番目のエージェントを \triangleright_i と表す。また、メカニズムの中で順序 \triangleright からエージェントを取り除く動作を行うため、 $|\triangleright|$ で現在の順序 \triangleright が含むエージェントの人数を表す。

提案メカニズムである YI-SN は Algorithm 1 で定義される。まず、順序 \triangleright が定める 1 番目のエージェント a^* に、残っている住宅の中で最も好む住宅 h^* を尋ねる (2–3 行目)。最も好む住宅 h^* が空き住宅 (すなわち、 $h^* \in H_V$) であるならば、エージェント a^* に住宅 h^* を割り当てる。そして、 a^* および h^* をマーケットから除き、次のエージェントの順番とする (4–6 行目)。

もし、 a^* が最も好む住宅 h^* が空き住宅でないとき、エージェント a^* がこの住宅 h^* を指差しておくことにする。そして、この住宅 h^* を初期保有として持つテナントエージェント a を、順序 \triangleright の先頭に移動させ、アルゴリズムの先頭へ戻る (8–11 行目)。

どこかの段階で、指差しの連鎖がループ (loop) を構成することがある。そのとき、ループに含まれる各エージェント b は、自分が指差している住宅 h_b を割り当て

として受け取り、受け取った住宅とともにマーケットから除かれる (13–19 行目)。マーケットに残っているエージェントが存在する限り、同様の動作を継続する。

このメカニズムは、Kawasaki ら [3] が提案した、ネットワーク上の TTC (TTC-SN) の一般化と考えることができる。実際、 $k = n$ の場合、すなわち、全てのエージェントが住宅を予め保有しているテナントであるとき、YI-SN は TTC-SN と等価となる。また、紙幅の都合上証明は省略するが、TTC-SN と同様に、YI-SN は個人合理性とパレート効率性を満足する。

4 適切な順序の定め方

前章で述べたように、YI-SN は TTC-SN の一般化である。したがって、Kawasaki ら [3] の定理 5.2. より、ネットワーク構造に制限を設けない場合、YI-SN が耐戦略性を満足するためには、エージェントの選好のドメインが非循環的 (acyclic) である必要がある。

選好ドメイン Π が非循環的であるとは、 Π に含まれる任意の 2 つの選好 $\succ, \succ' \in \Pi$ 、および任意の 3 つの住宅 $h_1, h_2, h_3 \in H$ に関して、 $[h_1 \succ h_2 \succ h_3] \Rightarrow [h_1 \succ' h_3]$ が成立することをいう。

しかしながら、以下の例に示すように、YI-SN は、選好ドメインが非循環的であっても、YI-SN が用いる順序 \triangleright の構成によっては、必ずしも耐戦略性を満足しない。

例 1. テナント a 、新規エージェント b, c 、ならびに主催者エージェント s が存在する状況を考え、テナント a の保有する住宅を o_a 、空き住宅を h_1, h_2 とする。各エージェントの選好 $\succ_a, \succ_b, \succ_c$ 、ならびにフォロワの集合 r_s, r_a, r_b, r_c は以下で与えられているとする：

$$\begin{aligned} \succ_a & : h_1 \succ h_2 \succ o_a \\ \succ_b & : h_1 \succ h_2 \succ o_a \\ \succ_c & : h_1 \succ h_2 \succ o_a \end{aligned}$$

$$r_s = \{c\}, r_a = \emptyset, r_b = \{a\}, r_c = \{b\}$$

ここで、上の選好プロファイルにおいて、全てのエージェントは同一の選好を有しており、明らかに非循環的な選好ドメインである。

今、順序 \triangleright が、 $a \triangleright b \triangleright c$ と定められているとする。各エージェントが自分のタイプを正直に申告するとき、YI-SN はエージェント a に住宅 h_1 を、エージェント b に住宅 h_2 を、エージェント c に住宅 o_a を割り当てる。

一方、エージェント c がタイプ $\theta'_c = (\succ_c, \emptyset)$ を申告すると、主催者エージェントから到達可能なエージェントは c のみとなるため、YI-SN はエージェント c に住宅 h_1 を割り当てる。この虚偽の表明により、エー

エージェント c はより好む住宅を得ることができているため、耐戦略性に違反する。

YI-SN の耐戦略性を保証する順序 \triangleright の決め方は存在するだろうか。以下の定理は、そのような順序が少なくとも一つ存在することを示している。

定義 4 (距離優先順序). エージェント a の、主催者エージェント s との距離 d_a とは、ソーシャルネットワーク G におけるノード s からノード a への最短路の距離である。順序 \triangleright が距離優先順序であるとは、任意の2エージェント $a, b \in A$ について、 $[d_a < d_b] \Rightarrow [a \triangleright b]$ が成立することをいう。

定理 1. 選好ドメインが非循環的であると仮定する。住宅割当メカニズム YI-SN が用いる順序 \triangleright が距離優先順序であるとき、YI-SN は耐戦略性を満たす。

証明の概略. YI-SN の元となった YRMH-IGYT メカニズムは、虚偽選好の表明に対して頑健であることが知られている [1]。したがって、フォロワの集合をより小さく偽る操作によって得をできるエージェントが存在しないことを示せば十分である。

背理法によって示す。YI-SN が距離優先順序 \triangleright を用いる場合に、あるエージェント a が存在し、フォロワの集合 r_a を $r'_a \subset r_a$ と偽ることで、より好ましい住宅を獲得できると仮定する。すなわち、 a の真のタイプを $\theta_a = (\succ_a, r_a)$ とするとき、虚偽のタイプ $\theta'_a = (\succ_a, r'_a) \in R(\theta_a)$ について、 $f_a(\theta'_a, \theta'_{-a}) \succ_a f_a(\theta_a, \theta'_{-a})$ が成立する。ここで、 $h := f_a(\theta_a, \theta'_{-a})$ 、 $h' := f_a(\theta'_a, \theta'_{-a})$ とすると、選好は厳密であるため、 $h \neq h'$ である。

住宅 h' は、エージェント a にとって、住宅 h より厳密に好ましい。したがって、エージェント a が正直にタイプを申告して住宅 h を割り当てられたとき、既に住宅 h' はマーケットに存在していない。言い換えると、別のエージェントに既に割り当てられている。このエージェントを a' とする。このとき、順序 \triangleright の決め方の仮定から、 $a' \triangleright a$ となっており、エージェント a がフォロワの集合を偽っても、 a' の順序は下らない。

エージェント a がフォロワの集合を偽ることで、エージェント a' へ住宅 h' が割り当てられることを防げるかどうかを考える。エージェント a' への h' の割当が、Algorithm 1 の5行目の操作によって行われた場合、すなわち、その時点で住宅 h' が空いていた場合、前述の通り、 a' の順序を下げることはできないため、 h' が a' に割り当てられることを防ぐことはできない。

エージェント a' への h' の割当が、Algorithm 1 の15行目の操作によって行われた場合、すなわち、別のエージェント a'' の所有する住宅との交換によって a' が h' を得た場合、選好の非循環性の仮定より、 a' と a'' との

住宅の交換を防ぐためには、いずれかのエージェントをネットワークから排除するしかない。しかし、いずれかのエージェントを削除しても、選好は非循環的であることから、除かれなかったエージェントが自分の初期保有の住宅を割り当てられる。したがって、エージェント a が住宅 h' を獲得することはできない。□

5 結論

本研究ではネットワーク上のテナント付き住宅割当問題を新たに考察し、既存のメカニズムをネットワーク上のテナント付き住宅割当問題に適用した YI-SN メカニズムが耐戦略性を満足するための条件を吟味した。可能なソーシャルネットワークの構造を制限可能な場合に、YI-SN メカニズムが耐戦略性を満足するためのソーシャルネットワークの構造に関する必要十分条件を示すことが今後の課題である。

謝辞

本研究は JSPS 科研費基盤研究 (A) (課題番号 20H00587 および 20H00609)、ならびに文部科学省ダイバーシティ研究環境実現イニシアティブ (先端型) の助成を受けました。深く感謝致します。

参考文献

- [1] A. Abdulkadiroğlu & T. Sönmez. House allocation with existing tenants. *J. Econ. Theory*, 88(2): 233–260, 1999.
- [2] T. Kawasaki, N. Barrot, S. Takanashi, T. Todo, & M. Yokoo. Strategy-proof and non-wasteful multi-unit auction via social network. In *Proc. the 34th AAAI Conf. Artif. Intell. (AAAI-20)*: 2062–2069, 2020.
- [3] T. Kawasaki, R. Wada, T. Todo, & M. Yokoo. Mechanism design for housing markets over social networks. In *Proc. the 20th Intl. Conf. Auton. Ag. & Multiag. Sys. (AAMAS-21)*: 692–700, 2021.
- [4] B. Li, D. Hao, D. Zhao, & T. Zhou. Mechanism design in social networks. In *Proc. AAAI-17*: 586–592, 2017.
- [5] N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, & V. V. Vazirani, eds. *Algorithmic Game Theory*. Cambridge University Press, 2007.
- [6] L. Shapley & H. Scarf. On cores and indivisibility. *J. Math. Econ.*, 1(1): 23–37, 1974.