A-021

ドーナツグラフのグラフクラスの拡張
Extension of Graph Class of Doughnut Graphs

齋藤 元樹 [*] 三浦　一之 [†]
Motoki Saito　Kazuyuki Miura

概 要

平面グラフ G の描画で，G の各点が整数格子の格子点上に配置され，G の各辺が交差の無い直線分として描かれたものを格子直線描画という．n を G の点数としよう．$n \geq 3$ なる平面グラフは，大きさ $(n-2)\times(n-2)$ の整数格子内に格子直線描画できる．グラフの制限をより厳しくすることによって得られた **5 連結 p-k 重ドーナツグラフ** G は，$\{n/(2k-2)+(2k-5)\}\times(2k-1)$，即ち $O(n)$ の大きさの整数格子内に格子直線描画できることが知られている

本論文では，5 連結 p-k 重ドーナツグラフを拡張した **5 連結 p-l-k 重ドーナツグラフ**の定義を与えるとともに，l と k にある数値をあてはめて構成したいくつかのドーナツグラフを与える．さらに，それらのグラフは $O(n)$ の面積の整数格子内に格子直線描画できることを証明すると共に，そのような描画を求める線形時間アルゴリズムを与える．

1　序論

近年，様々な分野で与えられたグラフを「構造を理解しやすく」かつ「きれいに」描画する手法が求められている [1, 4, 5, 8]．平面グラフ G の描画で，G の各辺が交差の無い直線分として描かれたものを**直線描画**という．G の直線描画で，G の各点が整数座標を持つものを**格子直線描画**という．なお，本論文ではグラフ G の点数を n で表す．また，大きさ $W\times H$ の**整数格子**は $W+1$ 本の垂直線分と $H+1$ 本の水平線分およびそれらの交点からなり，その外周は矩形であるとする．W は整数格子の**幅**，H は**高さ**という．整数格子の幅を W，高さを H とする．格子サイズは $W\times H$ と表す．

全ての平面グラフ G が直線描画を持つことが知られている [2, 6, 7]．また，$n\geq 3$ の頂点の全ての平面グラフは，$(n-2)\times(n-2)$ の大きさの整数格子内に格子直線描画できることが知られている [3, 5]．さらに，$n\geq 3$ なる平面グラフで格子直線描画にするには，少なくとも $\lfloor\frac{(2(n-1)}{3}\rfloor\times\lfloor\frac{(2(n-1)}{3}\rfloor$ の大きさの格子が必要なものがあることが知られている [1, 3]．n 点からなる全ての平面グラフは，大きさ $\lceil 2n/3\rceil\times\lceil 2n/3\rceil$ の格子内に格子直線描画できると予想されているが，証明はされていない．

このように，一般的な平面グラフの格子直線描画には，少なくとも $\Omega(n^2)$ の面積の格子が必要となるが，グラフの制約をより厳しくすることによって，必要な整数格子の大きさはより小さくて済むと予想される．例えば，**5 連結 p-k 重ドーナツグラフ**と呼ばれるグラフは，$\{n/(2k-2)+(2k-5)\}\times(2k-1)$ の大きさの整数格子内に格子直線描画できることが知られている [8]．k は定数とみなせるので，描画に必要な面積は $O(n)$ である．しかし，この 5 連結 p-k 重ドーナツグラフは，制限が厳しく，グラフクラスが狭いものとなっていたため，グラフクラスの拡張が求められている．

本論文では，5 連結 p-k 重ドーナツグラフを拡張した **5 連結 p-l-k 重ドーナツグラフ**の定義を与えるとともに，l と k にある数値をあてはめて構成したいくつかのドーナツグラフを与える．さらに，それらのグラフは $O(n)$ の面積の整数格子内に格子直線描画できることを証明すると共に，そのような描画を求める線形時間アルゴリズムを与える．

*福島大学 共生システム理工学類
†福島大学大学院 共生システム理工学研究科

2　準備

本節では，いくつかの定義と既知の補題を与える．グラフ G は多重辺や自己ループのない単純グラフであり，しかも連結であるとする．各辺が互いに交差しないように平面に描画したグラフを**平面グラフ**という．グラフ G の任意の k-1 点を取り除いてできるグラフが連結であるとき，G は k **連結**であるという．点 v に接続する辺の本数を v の**次数**といい，$d(v)$ と書く．全ての点が外面にあるグラフを **1-外平面グラフ**という．k-**外平面グラフ**とは外面上の点を全て取り除くと k-1-外平面グラフとなるグラフである．$G=G_k$ を k-外平面グラフとし，G_k の外面上の点を全て取り除いてできる k-1-外平面グラフを G_{k-1} と書く．$1\leq i\leq k$ なる各 i に対して G_i が 2 連結であるならば，G_k を **2 連結 k-外平面**グラフという．

ここで，[8] で与えられている，5 連結 p-k 重ドーナツグラフの定義を与える．p を 4 以上の整数とし，k を 3 以上の整数とし，G を 5 連結平面グラフとする．G が以下の条件 $(d_k$-1) および $(d_k$-2) を満足するとき，G を **5 連結 p-k 重ドーナツグラフ** [8] という．

(d_k-1) 頂点の数が p 個の互いに素な面をちょうど 2 つ持ち，頂点の数が 4 個の面をちょうど (k-3)p 個持ち，残りの面は全て三角形である．

(d_k-2) G は，(d_k-1) の条件を満足する最少の点数を持つグラフである．

また，G が 5 連結 p-k 重ドーナツグラフであるならば，以下の 3 つの性質 (p_k-1)，(p_k-2) および (p_k-3) を満足する．

(p_k-1) $n=2(k-1)p$ である．

(p_k-2) G の全ての点 v に対して $d(v)$=5 である．

(p_k-3) G は 2 連結 k-外平面グラフである．

図 1(a) に 5 連結 p-k 重ドーナツグラフ (p=4, k=6) の例を示す．以下の補題が知られている．

補題 2.1 [8]G を 5 連結 p-k 重ドーナツグラフとする．このとき G は $n/(2k-2)+(2k-5)\times(2k-1)$ の大きさの整数格子内に格子直線描画できる (図 1(b) 参照.)

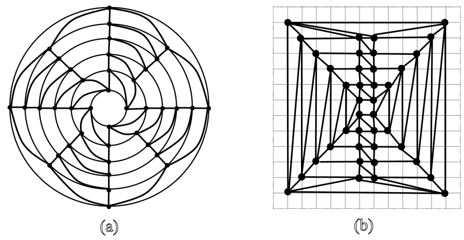

図 1: （a）5 連結 p-k 重ドーナツグラフ $G(p=4,k=6)$，（b）G の格子直線描画.

3　5 連結 p-l-k 重ドーナツグラフ

本節では，[8] で与えられている 5 連結 p-k 重ドーナツグラフを拡張した 5 連結 p-l-k 重ドーナツグラフの定義を与えるとともに，いくつかの定理を与える．ここで，l は p 頂点の面を除いた面の中で頂点の数が最大のものの頂点数を指す．

まず $l=5$ の場合を考えよう．p を 4 以上の整数とし，k を 5 以上の整数とし，G を 5 連結平面グラフとする．G が以下の条件 (d_5-k-1) および (d_5-k-2) を満足するならば，G を **5 連結 p-5-k 重ドーナツグラフ**という．

(d_5-k-1) 頂点の数が p 個の互いに素な面をちょうど 2 つ持ち，頂点の数が 4 個の面をちょうど (k-4)p 個持ち，頂点の数が 5 個の面をちょうど p 個持ち，残りの面は全て頂点の数が 3 である．

(d_5-k-2) G は，(d_5-k-1) の条件を満足する最少の点数を持つグラフである．

また，G が 5 連結 p-5-k 重ドーナツグラフであるならば，以下の 3 つの性質 (p_5-k-1)，(p_5-k-2)，(p_5-k-3) を満足する．

(p_5-k-1) $n=2kp$ である．

(p_5-k-2) G の全ての点 v に対して $d(v)$=5 である．

(p_5-k-3) G は 2 連結 k-外平面グラフである．

5 連結 p-5-k 重ドーナツグラフは，[8] と同様の手法により，線形時間で格子直線描画できることが容易に証明できる．p=4, k=5 なる 5 連結 p-5-k 重ドーナツグラフを例としたアルゴリズムの概略を図 2 に示す．このとき，次の主定理が成り立つ．

定理 1 G を 5 連結 p-5-k 重ドーナツグラフとする．このとき G は $(\lceil \frac{3n}{4k} \rceil + 3) \times (2k-1)$ の大きさの整数格子内に線形時間で格子直線描画できる．

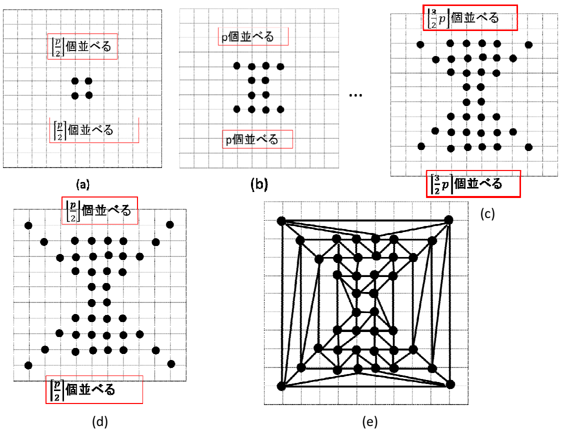

図 2: アルゴリズムの概略

次に，$l=6$ の場合を考えよう．p を 4 以上の整数とし，k を 7 以上の整数とし，G を 5 連結平面グラフとする．G が以下の条件 (d_6-k-1) および (d_6-k-2) を満足するならば，G を **5 連結 p-6-k 重ドーナツグラフ**という．

(d_6-k-1) 頂点の数が p 個の互いに素な面をちょうど 2 つ持ち，頂点の数が 4 個の面をちょうど (k-6)p 個持ち，頂点の数が 5 個の面をちょうど p 個持ち，頂点の数が 6 個の面をちょうど p 個持ち，残りの面は全て頂点の数が 3 である．

(d_6-k-2) G は，(d_6-k-1) の条件を満足する最少の点数を持つグラフである．

また，G が 5 連結 p-6-k 重ドーナツグラフであるならば，以下の 3 つの性質 (p_6-k-1)，(p_6-k-2)，(p_6-k-3) を満足する．

(p_6-k-1) $n=2(k+1)p$ である．

(p_6-k-2) G の全ての点 v に対して $d(v)$=5 である．

(p_6-k-3) G は 2 連結 k-外平面グラフである．

このとき，定理 1 と同様にして，以下の定理が成り立つ．

定理 2 G を 5 連結 p-6-k 重ドーナツグラフとする．このとき G は $(\lceil \frac{3n}{4(k+1)} \rceil + 7) \times (2k-1)$ の大きさの整数格子内に線形時間で格子直線描画できる．

最後に，$l=7$ の場合を考えよう．p を 4 以上の整数とし，k を 10 以上の整数とし，G を 5 連結平面グラフとする．G が以下の条件 (d_7-k-1) および (d_7-k-2) を満足するならば，G を **5 連結 p-7-k 重ドーナツグラフ**という．

(d_7-k-1) 頂点の数が p 個の互いに素な面をちょうど 2 つ持ち，頂点の数が 4 個の面をちょうど (k-7)p 個持ち，頂点の数が 5 個の面をちょうど p 個持ち，頂点の数が 6 個の面をちょうど p 個持ち，頂点の数が 7 個の面をちょうど p 個持ち，残りの面は全て頂点の数が 3 である．

(d_7-k-2) G は，(d_7-k-1) の条件を満足する最少の点数を持つグラフである．

また，G が 5 連結 p-7-k 重ドーナツグラフであるならば，以下の 3 つの性質 (p_7-k-1)，(p_7-k-2)，(p_7-k-3) を満足する．

(p_7-k-1) $n=2(k+4)p$ である．

(p_7-k-2) G の全ての点 v に対して $d(v)$=5 である．

(p_7-k-3) G は 2 連結 k-外平面グラフである．

このとき，定理 1 および 2 と同様にして，以下の定理が成り立つ．

定理 3 G を 5 連結 p-7-k 重ドーナツグラフとする．このとき G は，$p \leq 10$ のとき $(\lceil \frac{3n}{4(k+4)} \rceil + 13) \times (2k-1)$，$11 \leq p$ のとき $(\lceil \frac{5n}{4(k+4)} \rceil + 3) \times (2k-1)$ の大きさの整数格子内に線形時間で格子直線描画できる．

参考文献

[1] M. Chrobak and S. Nakano, Minimum-width grid drawings of a plane graphs, Computational Geometry: Theory and Applications, 11, pp. 29-54, 1998.

[2] I. Fary, On Straight line representation of planar graphs, Acta Scientiarum Mathematicarum, Szeged, 11, pp. 229-233, 1948.

[3] H. de Fraysseix, J. Pach and R. Pollack, How to draw a planar graph on a grid. Combinatorica, 10, pp. 41-51, 1990.

[4] M. R. Karim and M. S. Rahman, Four-connected spanning subgraphs of doughnut graphs, Proceedings of Workshop on Algorithms and Computation, 2008, Lect. Notes in Computer Science, Springer, 4931, pp. 132-143, 2008.

[5] W. Schnyder, Embedding planar graphs on the grid, Proceedings of First ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, San Francisco, pp. 138-148, 1990.

[6] K. S. Stein, Convex maps, Proceedings of the American Mathematical Society, 2, pp. 464-466, 1951.

[7] K. Wagner, Bemerkugen zum veierfarbenproblem, Jasresber. Deutsch. Math-Verien., 46, pp. 26-32, 1936.

[8] 添田知宏，三浦一之，一般化ドーナツグラフの格子直線描画，電子情報通信学会論文誌 D Vol. J101-D No. 3 pp. 494-501，2018.