A-018

平面グラフのトラック描画可能性判定問題の計算複雑度について
On computational complexity of the track drawability problem for plane graphs

中島 洸夢† 宮田 洋行† 中野 眞一†
Hiromu Nakajima Hiroyuki Miyata Shin-ichi Nakano

1. はじめに

グラフは様々な関係を表現する離散構造であるが，グラフの描画には大きな任意性があるため，理解しやすいグラフの描画に関する研究が数多く存在する．例えば，より交差の少ない描画，各面の面積が均等な描画，2 つの枝のなす最小の角度が大きい描画等が理解しやすい描画として研究されている．

グラフの頂点を平面上の点，枝を互いに交差しない直線分として描画したものを**平面直線描画**という．平面直線描画のうち，頂点がトラックと呼ばれる平行線上に配置され，枝がトラック上にあるか 2 つの隣接するトラック間にあるものを**トラック描画** [1] という．また，トラック描画のうち，特に全ての枝が 2 つの隣接するトラック間に配置されたものは**レベル描画** [2] と呼ばれる．

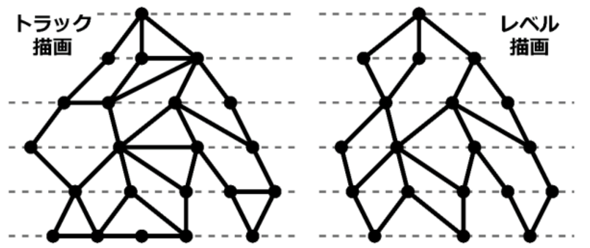

図 1 トラック描画とレベル描画の例（点線はトラック）

本研究では，与えられた平面グラフが（外面と埋め込みを保って）トラック描画可能であるかを判定する問題（**トラック描画可能性判定問題**）の計算複雑度について考察する．平面グラフのレベル描画可能性判定問題については，すでに NP 困難であることがわかっており [2]，その証明 を一部修正することによって，トラック描画可能性判定問題も NP 困難であることが容易に証明できる．本研究ではさらに考察を進め，入力の平面グラフの内面の面周長に着目し，入力に制限を加えたときの計算複雑度の分類を行う．具体的には，入力を内面の最大面周長が k 以下の 2-連結平面グラフ（以後，単に**面周長 k 以下の平面グラフ**と呼ぶ）に制限したトラック描画可能性判定問題について，$k=3$ のとき（すなわち，入力が三角形分割のとき）は多項式時間で解け，$k \geq 10$ のときは NP 困難であることを示す．

2. 三角形分割のトラック描画可能性判定問題の多項式時間アルゴリズム

本節では，三角形分割のトラック描画可能性判定問題が多項式時間で解けることを示す．そのために，以下の定義を行う．トラック描画のうち，0 番目のトラックに配置されている頂点が 1 本のパス上にあり，そのパスから距離 i だけ離れた頂点がちょうど i 番目のトラックに配置されたものを**基本トラック描画**と定義する（図 2 参照）．

†群馬大学 Gunma University

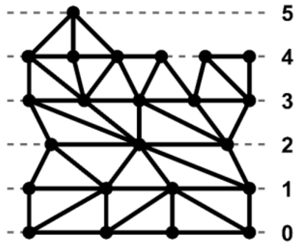

図 2 三角形分割の基本トラック描画の例

命題 1 三角形分割 G がトラック描画可能ならば，G は基本トラック描画可能である．

証明 ある G のトラック描画を D とする．D において，0 番目のトラックにある極大なパスを 1 つ選択し，そのパスに含まれる頂点の集合を V_0 とし，D において左に登場する順に順序を入れることとする．次に，V_0 から距離 i の頂点の集合を V_i とする．頂点集合 V_i には，接続する V_{i-1} の頂点の順序が小さいほど小さく，また同じ V_{i-1} の頂点に接続する頂点は反時計回りに 適切に順序を入れることとする．このとき，V_i との頂点を i 番目のトラックに上記の順序に従って左から順に配置し，枝を直線分で結ぶと交差が起こらず，基本トラック描画になっている． □

次に，三角形分割が基本トラック描画可能か判定する問題が多項式時間で解けることを示す．

命題 2 三角形分割 G の基本トラック描画可能性判定問題を $O(n^3)$ 時間で解くアルゴリズムが存在する．ただし，n は G の頂点数を表す．

証明 G が基本トラック描画可能ならば，0 番目のトラックの頂点は外面上のパスであるはずである．したがって，G の外面を定義する閉路の部分パス全てについて，それを 0 番目のトラックに配置して基本トラック描画可能か調べ，基本トラック描画可能なものがあれば G は基本トラック描画可能，そうでなければ基本トラック描画不可能と判定できる．

0 番目のトラックに配置する頂点を固定したときの基本トラック描画可能性判定は，V_0 の頂点全てに接続する頂点 r を導入して，r から幅優先探索を行い，V_i およびその順序を命題 1 の証明と同様に決定したときに交差が起こらないことを確かめることで行えるので，$O(n)$ 時間で実行可能である．外面の部分パスは高々 n^2 個なので，上記のアルゴリズムを高々 n^2 回繰り返すことで，$O(n^3)$ 時間で G の基本トラック描画可能性が判定可能である． □

命題 1 と命題 2 より，以下の定理が成り立つ．

定理 3 三角形分割 G のトラック描画可能性判定問題は $O(n^3)$ 時間で解ける．ただし，n は G の頂点数を表す．

ここで，G の全ての埋め込みを考え，その中にトラック描画可能なものがあるか判定する問題を考える．長さ 3 の閉路は内面か外面としないとトラック描画ができないこと

は明らかである．また，外面が長さ 3 の閉路で内部に頂点を持つとき，トラック描画できないので，以下がわかる．

系 4　三角形分割がトラック描画可能な埋め込みを持つか判定する問題は $O(n^3)$ 時間で解ける．

3. 面周長 10 以下の平面グラフのトラック描画可能性判定問題の NP 困難性

レベル描画可能性判定問題の NP 困難性証明 [2] を一部修正することによって，面周長 10 以下の平面グラフのトラック描画可能性判定問題が NP 困難であることを証明する．

既存研究 [2] では，平面的 3-SAT のインスタンス ϕ と対応する平面グラフ $G(\phi)$ から，ϕ の充足可能性と平面グラフ H のレベル描画可能性が同値になるようなインスタンス H を構成することでレベル描画可能性の NP 困難性を証明している．本研究では，平面的 3-SAT のインスタンス ϕ と対応する平面グラフ $G(\phi)$ から，ϕ の充足可能性と平面グラフ H のトラック描画可能性が同値になるような面周長 10 以下の平面グラフ H を構成することで面周長 10 以下の平面グラフのトラック描画可能性の NP 困難性を証明する．

まず，上記のレベル描画可能性判定問題のインスタンス H において，各枝を $K_{2,4}$ に置き換えたグラフを H' とする．このようにすると，H' がトラック描画を持つことと H がレベル描画可能であることは同値となる．実際，図 3 のように $K_{2,4}$ をトラック描画することを考えると，頂点 u,v がちょうど 2 トラックだけ離れた描画となっており，u,v は同一のトラック上に描画できないことが観察できる．従って，以下が成立する．

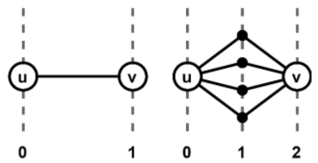

図 3　枝 (u,v) から $K_{2,4}$-ガジェットへの変更

定理 5　平面グラフのトラック描画可能性判定問題は NP 困難である．

次に，H' の面周長を 10 以下にすることによって，H'' を構築する．まず，ϕ に含まれる節 c_j が充足可能であるときに限り，c_j に対応したガジェットがトラック描画可能であるという性質を満たすように，頂点と枝を付け加えることで，c_j に対応したガジェットを面周長 10 以下の平面グラフとすることができる（図 4 参照）．また，H' において，ガジェット間を結ぶ枝同士をパスによって適切に結ぶことによって，面周長 10 以下の平面グラフ H'' を得ることができる（図 5 参照）．これにより，以下の定理が証明できる．

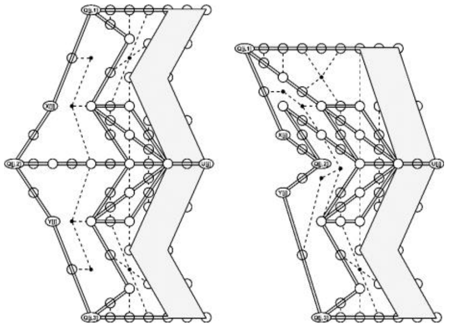

図 4　H'' の節ガジェット（左図：真ん中のリテラルだけが真のとき，右図：一番上のリテラルだけが真のとき，点線は面周長 10 以下の平面グラフにするために加えたパス）

定理 6　面周長 10 以下の平面グラフのトラック描画可能性判定問題は NP 困難である．

なお，H'' は本質的に一通りの平面埋め込みを持つ平面グラフであることから，以下の定理が成り立つ．

系 7　面周長 10 以下の平面グラフを持つグラフについて，トラック描画可能な埋め込みが存在するか判定する問題は NP 困難である．

4 おわりに

本研究では，三角形分割のトラック描画可能性判定問題が多項式時間で解けることと，面周長 10 以下の平面グラフのトラック描画可能性判定問題が NP 困難であることを示した．また，トラック描画可能である埋め込みが存在するか考える問題に関しても同様の結果が得られた．

今後の展望としては，面周長 k 以下の平面グラフのトラック描画可能性判定問題の計算複雑度について，$4 \leq k \leq 9$ の場合について、どこまでが多項式時間で解けて、どこからが NP 困難であるか，さらに詳しく調べていきたい．

参考文献

[1] S. Felsner, G. Liotta, S. Wismath, “Straight-line drawings on restricted integer grids in two and three dimensions” J. Graph Algorithms Appl. 7(4), 363-398 (2003).

[2] L.S. Heath and A.L. Rosenberg, “Laying out graphs using queues” SIAM J. Comput. 21(5), 927–958 (1992).

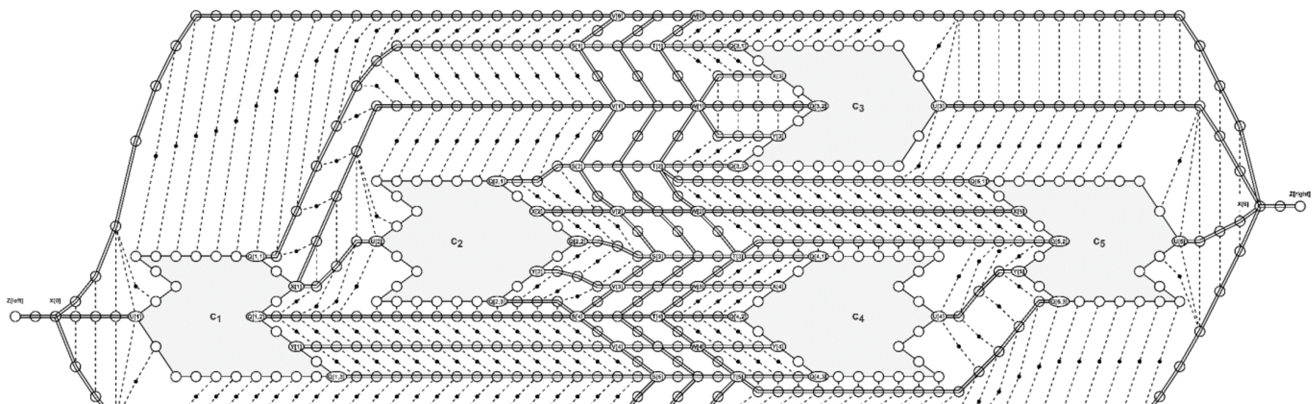

図 5　H'' の概略図（$c_1,\dots,c_5$ は節ガジェット，点線は面周長 10 以下の平面グラフにするために加えたパス）