A-010

実現確率的ボラティリティ変動モデルにおけるバイアスの測定：ハミルトニアンモンテカルロ法によるパラメータ推定

Measurement of Bias in Realized Stochastic Volatility Model : Parameter Estimation by Hamiltonian Monte Carlo Method

高石 哲弥†
Tetsuya Takaishi

1. はじめに

金融資産のリスク管理では、リスク指標として時系列の変動の大きさを表すボラティリティ（分散に対応）がよく使われる。金融時系列データとして入手しやすいのは日次の価格データであるが、収益率時系列にすると 1 日に１個の収益率データとなる。もし日次の分散が知りたいとしても、１個のデータからは正確な分散を求めるのは難しい。そこで、金融資産価格の実証分析では、分散に何らかの時系列構造を持ったモデルを導入し、過去のデータにフィットするようにモデルパラメータを決定し、分散の推定や予測を行う。実証分析で良く用いられるモデルの１つとして、確率的ボラティリティ変動モデルがある。このモデルは、分散が過去の分散に確率的に変動するようにモデル化されている。そのため、このモデルの尤度関数は積分形となり、尤度関数を直接最大化することによってパラメータを決定することが難しく、ベイズ推定を用いたパラメータ推定が一般的である。

近年、日中の高頻度の取引データが容易に利用できるようになり、高頻度データから分散を推定することもできるようになってきた。高頻度データを利用した分散を実現ボラティリティと呼ぶ。高頻度データを利用することで、モデルを利用せずに分散を推定できるようになるが、その一方で、取引市場特有のマイクロストラクチャーノイズが存在し、より高頻度のデータにおいてノイズのバイアスが大きくなることが知られている。そのため、実現ボラティリティの利用の際には、このバイアスを修正する必要がある。

Takahashi ら[1]は確率的ボラティリティ変動モデルに実現ボラティリティを導入した実現確率的ボラティリティ変動モデルを提唱した。このモデルでは、追加で実現ボラティリティデータも利用するので、ボラティリティ推定の精度が上がることが期待される。また、実現ボラティリティのバイアス修正ファクターもモデルのパラメータとして取り込み、あらかじめ修正ファクターを計算する必要がない利点がある。

本研究では、実現確率的ボラティリティ変動モデルを用い、ビットコイン収益率時系列のボラティリティ推定を行う。その際、様々なサンプリング周波数で計算した実現ボラティリティを用い、サンプリング周波数の違いによるバイアスの影響を調べる。

2. 実現確率的ボラティリティ変動モデル

本研究で利用するモデルは以下で表される[1]。

$$\mathrm{R}_t = \exp(h_t/2)\varepsilon_t,\ \ \varepsilon_t \sim N(0,1),\ \mathrm{t} = 1,\cdots,\mathrm{T} \quad (1)$$

$$\ln\mathrm{RV}_t = \xi + h_t + u_t,\ u_t \sim N(0,\sigma_u^2),\ \mathrm{t} = 1,\cdots,\mathrm{T} \quad (2)$$

$$\mathrm{h}_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t,\ \eta_t \sim N(0,\sigma_\eta^2),\ \mathrm{t} = 1,\cdots,\mathrm{T}-1 \quad (3)$$

$$\mathrm{h}_1 = \mu + \eta_0,\quad \eta_0 \sim N(0,\frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi}). \quad (4)$$

ここで、T はデータ数、R_tは収益率、RV_tは実現ボラティリティ、h_tは$h_t \equiv \ln(\sigma_t^2)$で定義されるボラティリティ変数である。$\mu,\phi,\sigma_\eta^2,\xi,\ \sigma_u^2$はモデルパラメータである。この中で、$\xi$が実現ボラティリティへの修正ファクターに対応する。モデルパラメータはベイズ推定によって求める。ベイズ推定の実行にはマルコフ連鎖モンテカルロ法を用い、その中でボラティリティ変数の更新にはハミルトニアンモンテカルロ法を用いる。

3. ハミルトニアンモンテカルロ法

ハミルトニアンモンテカルロ法は、ハイブリッドモンテカルロ法とも呼ばれ、元々は素粒子分野の格子 QCD 計算[2]のために開発されたマルコフ連鎖モンテカルロ法である。基本的なアイデアは、ハミルトン方程式を解いてサンプリング候補を選び、メトロポリス採択率を上げることである。また、複数の候補を同時に更新できることから、相関の小さいサンプリングとなることが期待できる[3,4,5]。ハミルトニアンモンテカルロ法の手続きは以下である。式（5）でハミルトニアンを定義する。

$$\mathrm{H}(\mathrm{h},\mathrm{p}) = \frac{1}{2}p^2 - \ln\mathrm{P}(\theta,\mathrm{h}|\mathrm{R},\mathrm{RV}), \quad (5)$$

ここで、$\mathrm{P}(\theta,\mathrm{h}|\mathrm{R},\mathrm{RV})$はモデルの尤度関数とベイズの定理から導出したボラティリティ変数$h = (h_1,\cdots,h_T)$の確率である。また、$\theta = (\theta_1,\cdots,\theta_5) = (\mu,\phi,\sigma_\eta^2,\xi,\sigma_u^2)$とし、$\mathrm{p} = (p_{1,\dots,}p_T)$はボラティリティ変数に対する共役運動量として、$p^2 \equiv \sum_{i=1}^{T} p_i^2$と置く。このハミルトニアンを利用すると、パラメータの期待値は

$$E[\theta_i] = \int \theta_i \exp(-\mathrm{H}(\mathrm{h},\mathrm{p}))d\theta dh dp\,/\bar{Z}, \quad (9)$$

で与えられる。ここで、$\bar{Z} = \int \exp(-\mathrm{H}(\mathrm{h},\mathrm{p}))\,d\theta dh dp.$ である。式(9)は、マルコフ連鎖モンテカルロ法によって見積もる。このとき、ボラティリティ変数とその共役運動量はハミルトニアンモンテカルロ法によってサンプリングを行う。ハミルトニアンモンテカルロ法では以下のハミルトン方程式を解いて新たな候補を選ぶ。

$$\frac{dh_i}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_i},\qquad \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial h_i}. \quad (10)$$

この方程式は一般には解析的に解けないので、分子動力学シミュレーション（MD）によって近似的に解いてゆく。MD で利用する積分法は、リープフロッグ法がよく利用されるが[6,7]、ハミルトニアンモンテカルロ法においては Minimum Norm(MN)積分法が有効である[8,9,10]とされているので、本研究でも MN 積分法を利用する。MD では、ステップサイズΔτで式（10）を積分し、k 回繰り返してある長さ$l = \Delta\tau \times k$まで積分し、次の候補$h(\tau+l), p(\tau+l)$を得る。そして、その候補を$\min[1,\exp(-\Delta H)]$の確率で採択する（メトロポリスステップ）。ここで、$\Delta H = H(h(\tau+l),p(\tau+l)) - H(h(\tau),p(\tau))$である。これら

†広島経済大学　Hiroshima University of Economics

のステップを繰り返し、ボラティリティ変数をサンプリングする。

4. データ

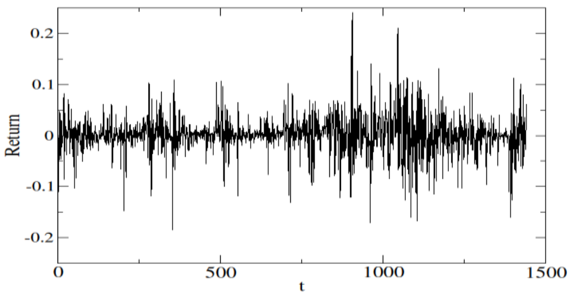

図 1： 日次収益率時系列

本研究では、Coinbase 取引所で取引された 2015 年 1 月 28 日から 2019 年 1 月 6 日までの Tick データを利用した。データは Bitcoincharts からダウンロードした。このデータから日次収益率と実現ボラティリティデータを作成した。実現ボラティリティはサンプリング周波数を 2,5,7,10,15,20,30 分として 7 種類について計算した。図 1 は日次収益率時系列を表している。

5. 結果

マルコフ連鎖モンテカルロ法によって 30000 個サンプリングし、初めの 5000 個を除いた 25000 個のサンプルを解析した。ここでは、パラメータϕとξの結果を示す。図 2 はϕの推定結果を表示している。ϕはサンプリング周波数によって違った値になっている。他のパラメータも似た周波数依存性が見られる。

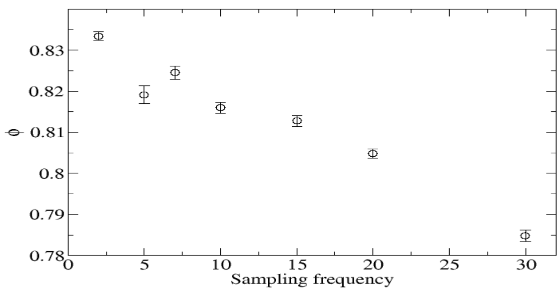

図 2：ϕの推定結果

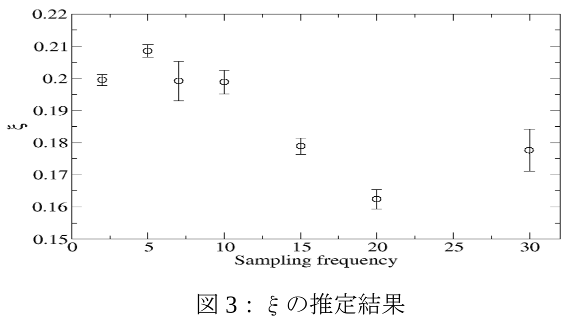

図 3：ξの推定結果

図 3 は修正ファクターに対応するξの結果である。ξは有限の値であり、実現ボラティリティに修正が必要なことを表している。

モデルが精度よくボラティリティを推定しているかどうかを調べるために、ボラティリティで標準化した収益率を調べた。つまり、式(1)から$R_t/\sigma_t = \varepsilon_t$となることが予想されるので、標準化収益率が標準正規分布に従っているかどうかで、モデルの精度が調べられる。図 4 は標準化収益率の分散を表示している。標準正規分布で期待される 1 からはズレており、何らかのバイアスが存在する。また、高頻度（小さいサンプリング周波数）で 1 からのズレが大きくなることから、高頻度でバイアスが大きくなっていると思われる。株価を用いた同様の研究でもモデルにバイアスが存在することが示されている[11]。

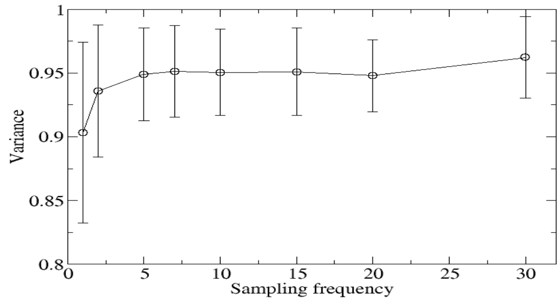

図 4：標準化収益率の分散

6. まとめ

本研究では、様々なサンプリング周波数で計算されたビットコインの実現ボラティリティを用い、実現確率的ボラティリティ変動モデルにおけるバイアスを調べた。ボラティリティ変数のサンプリングにはハミルトニアンモンテカルロ法を用いた。標準化収益率の分散値が正規分布の値からズレていることから、モデルにはバイアスが存在し、その大きさは高頻度で大きくなる兆候が見られた。

参考文献

[1] M. Takahashi, Y. Omori, and T. Watanabe, Estimating stochastic volatility models using daily returns and realized volatility simultaneously, Comput. Statist. Data Anal., 53, 2009, 2404-2426.
[2] S. Duane, A. D. Kennedy, B. J. Pendleton, and D. Roweth, Hybrid Monte Carlo, Phys. Lett. B, 195, 1987, 216-222.
[3] T. Takaishi, Bayesian Estimation of GARCH model by Hybrid Monte Carlo, Proceedings of the 9th Joint Conference on Information Sciences 2006.
[4] T. Takaishi, Financial time series analysis of SV model by hybrid Monte Carlo, Lect. Notes Comput. Sci., 5226, 2008, 929-936.
[5] T. Takaishi, Bayesian inference of stochastic volatility model by Hybrid Monte Carlo, J. Circuits Syst. Comput., 18, 2009, 1381-1396.
[6] T. Takaishi, Choice of integrators in the hybrid Monte Carlo algorithm, *Comput. Phys. Commun., 133,* 2000, 6-17.
[7] T. Takaishi, Higher order hybrid Monte Carlo at finite temperature, *Phys. Lett. 540,* 2002, 159-165.
[8] T. Takaishi and P. de Forcrand, Testing and tuning symplectic integrators for hybrid Monte Carlo algorithm in lattice QCD, Phys. Rev. E 73, 2006, 036706.
[9] T. Takaishi, Bayesian estimation of realized stochastic volatility model by Hybrid Monte Carlo algorithm, Journal of Physics: Conference Series, 490, 2014, 012092.
[10] T. Takaishi, Y. Liu, and T.T. Chen, An application of the hybrid Monte Carlo for realized stochastic volatility model, Proceedings of Science LATTICE 2015, 2016, 039.
[11] T. Takaishi, Bias correction in the realized stochastic volatility model for daily volatility on the Tokyo Stock Exchange, Physica A, 500, 2018, 139-154.