

面で構成されるグラフに対する Magic Graph Magic Graphs for Face Composed Graphs

杉山 雅英¹

Masahide Sugiyama

1 まえがき

Sedláček (1963) [1] が Magic Graph 問題を提起して以来、辺に着目した Edge-Magic Total Labeling (EMTL)[2, 3], 頂点に着目した Vertex-Magic Total Labeling (VMTL)[4], 平面グラフにおいて面に着目した Face Magic Graph [5, 6, 7, 8], さらに k 次元空間における超立方体のグラフに対する EMTL, VMTL の Magic Graph について検討されてきた [9, 10].

平面グラフにおいては全ての辺は常に 2 つの面に共有されており, 従来の Face Magic Graph の検討では全て辺は 2 つの面に共有されることを前提としている. しかしながら辺を多くの面に共有するグラフが存在する. 例えば 4 次元空間における超立方体 Q_4 は頂点数 16, 辺の数 32, 面の数 24 で, 全ての辺は 3 つの面に共有されている. このように面で構成されるグラフに対する Face Magic Graph の検討は見あたらない [11, 12]. 本報告では面で構成されるグラフに対する Face Magic について定和方程式を導き, 非存在及び定和の剰余制約定理を導く. さらにそれらの定理が成り立つグラフを構成する.

2 複数の面で構成されるグラフ

図 1 に 4 個の面 (三角形) が一つの辺を共有する水車型グラフ $C_3^{[4]}$ を示す. 頂点 v_{01}, v_{02} を結ぶ辺 e_{01} が 4 つの面 f_1, f_2, f_3, f_4 の辺となっている. 面で構成されるグラフ $G = V \cup E \cup F$ から連続する自然数の集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ の分割への式 (1) を満たす写像 $\lambda: G \rightarrow 2\{1, 2, \dots, n\}$

$$\begin{cases} \lambda(z) \cap \lambda(z') = \phi & (z, z' \in V \cup E \cup F) \\ \bigcup_z \lambda(z) = \{1, 2, \dots, n\} \end{cases} \quad (1)$$

に対して式 (2) で $z \in F$ の重み $\lambda^*(z)$ を定義する. ここで V, E, F はグラフ G の頂点・辺・面の集合であり, 全ての頂点・辺はいずれかの面を構成しているとし, 面は k 角形 ($k \geq 1$) で裏表の区別はないものとする.

$$\lambda^*(z) = \lambda(z) + \sum_{\substack{w \sim z \\ w \in V \cup E}} \lambda(w) \quad (z \in F) \quad (2)$$

式 (2) の右辺の第 2 項の和の記号 $w \sim z$ は w, z が共有していることを表し $\lambda(w)$ は面 z を共有する全ての頂点と辺 $w \in V \cup E$ に配置された数であり, 式 (2) の $\lambda(z), \lambda(w)$ を含む和は部分集合 $\lambda(z), \lambda(w)$ に属する数の和と定義する. $z \in V \cup E$ に対して $N_F(z) = \{w \sim z | w \in F\}$ とし $\deg_F(z) = |N_F(z)|$ と定義する. さらに面 $z \in F$ に対して辺に関する次数 $\deg_E(z) = s$ とは面 z が s 角形であることとし, $F^{(s)} = \{z \in F | \deg_E(z) = s\}$ ($F = \bigcup_s F^{(s)}$) とする. s 毎に全ての $z \in F^{(s)}$ に対して $\lambda^*(z)$ が一定値 $S^{(s)}$ の時, G, λ を Face Magic (FM) graph, Face Magic label (写像) と呼び, その一定値の集合 $\{S^{(s)}\}$ を定和¹の集合と呼ぶ. これは Vertex Magic, Edge Magic に拡張できる. 頂点・辺・面に置く数字の個数が各々一定値 $m_v, m_e, m_f (\geq 0)$ の時, $\mathbf{m} = [m_v, m_e, m_f]$ 型² magic graph (label) と呼ぶ [5]. $v = |V|, e = |E|, f = |F|$ とすると n は式 (3) で与えられる.

$$n = m_v v + m_e e + m_f f \quad (3)$$

G の面を考慮しない場合には $F = \phi, f = 0, m_f = 0$ とし, $\mathbf{m} = [m_v, m_e]$ とする. $S_Z = \sum_{z \in Z} \lambda(z)$ ($Z = V | E | F$) と表すと数字 $1, 2, \dots, n$ は頂点・辺・面 V, E, F の要素のいずれかに配置されるので式 (4) が成り立つ.

$$S_V + S_E + S_F = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = N \quad (4)$$

面で構成されるグラフに対する Face Magic の定和方程式は式 (5) で与えられる.

¹magic sum, magic constant と呼ばれる.

²Lih は平面グラフに対して頂点・辺・面に置く数字の個数 a, b, c を用いて (a, b, c) 型と呼んでいる.

*会津大学, The Univ. of Aizu

命題 1 Face Magic の定和方程式

Face Magic の定和集合 $\{S^{(s)}\}$ は式 (5) を満たす. ここで $f^{(s)}$ は次数 s の面の個数 $|F^{(s)}|$, $\deg_F(z)(z \in V \cup E)$ は頂点及び辺の面に関する次数である.

$$\sum_s f^{(s)} \cdot S^{(s)} = N + \sum_{z \in V \cup E} (\deg_F(z) - 1) \lambda(z) \quad (5)$$

証明を省略する. $S^{(s)}$ が s に依らず一定 $S^{(s)} = S$ の場合 $\sum_s f^{(s)} = f$ であるので左辺は $f \cdot S$ と簡単化される. 頂点 v_i の次数 $\deg_F(v_i)$ は頂点 v_i を共有する面の個数であり, 平面グラフでは頂点 v_i を共有する面の個数は v_i を共有する辺の個数に等しいので通常の頂点次数に一致する. 図 1 において v_{01}, v_{11} の通常の頂点次数は 5, 2 であるが, $\deg_F(v_{01}), \deg_F(v_{11})$ は 4, 1 である. 平面グラフでは辺次数は常に $\deg_F(e_j) = 2$ であるので式 (5) の右辺の第 2 項の辺に関する和は S_E である. 定和方程式 (5) を用いて **Face Magic** の非存在及び定和の剰余制約定理を導ける. 証明を省略する.

命題 2 Face Magic の非存在定理

グラフ G において次数 s の面の個数 $f^{(s)}$ が全て偶数で, 頂点及び辺の次数 $\deg_F(z)$ が全て奇数であり, 配置する数字の個数 n が $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$ を満たす時, **Face Magic** は存在しない.

命題 3 Face Magic の剰余制約定理

定和 $S^{(s)}$ と面の個数 $f^{(s)}$ は式 (6) を満たす. ここで d は $\deg_F(z) - 1$ ($z \in V \cup E$) の最大公約数である.

$$\sum_s f^{(s)} \cdot S^{(s)} \equiv N \pmod{d} \quad (6)$$

3 Face Magic の非存在と剰余制約を持つグラフの構成

非連結な ℓ 個の k 角形を ℓC_k で, 図 1 に示した ℓ 個の k 角形の面が一つの辺を共有する水車型グラフを $C_k^{[\ell]}$ で表す. $\mu_k = (m_v + m_e)k + m_f$ とする. 図 3 に示す二つの k 角形 ($k \geq 2$) の一辺を二つの四角形が共有するグラフを T_k とする.

3.1 Face Magic の非存在グラフの構成

命題 4 ℓC_k に対する Face Magic の非存在

ℓC_k において ℓ が偶数で μ_k が奇数の時, $[m_v, m_e, m_f]$ **Face Magic** は存在しない.

証明を省略する. 例えば $m_v = m_e = m_f = 1$ の時, μ_k が k に依らず奇数となるので ℓ が偶数であれば **Face Magic** は存在しない. 一方図 2 に示すように $\ell = 3, k = 3$ の時 $[1, 1, 1]$ FM ($S : 77$) が構成できる. グラフ T_k に対して命題 5 が成り立つ.

命題 5 グラフ T_k の Face Magic の非存在

グラフ T_k において k が奇数で $m_v + m_e$ が奇数の時, $[m_v, m_e, m_f]$ **Face Magic** は存在しない.

証明を省略する. 例えば $k = 3$ の時は $[1, 0, 1], [0, 1, 1]$ **Face Magic** は存在しないが図 4 に示すように $[1, 1, 1]$ **Face Magic** (最小定和 $S = 63$) を構成できる.

3.2 剰余制約を持つ Face Magic グラフの構成

水車型グラフ $C_k^{[\ell]}$ において頂点, 辺, 面の個数 v, e, f 及び ℓ 個の面を共有する頂点と辺の次数 $\deg_F(z)$ は式 (7) で与えられる.

$$\begin{cases} v = \ell(k-2) + 2, & e = \ell(k-1) + 1, \\ f = \ell, & \deg_F(z) = \ell \end{cases} \quad (7)$$

k, ℓ に係わらず $v - e + f = 1$ でオイラーの定理を満たさないので $C_k^{[\ell]}$ は平面グラフではない.

命題 6 $C_k^{[\ell]}$ Face Magic の定和の剰余制約

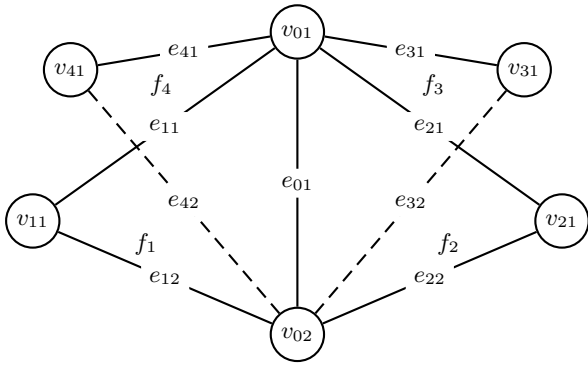
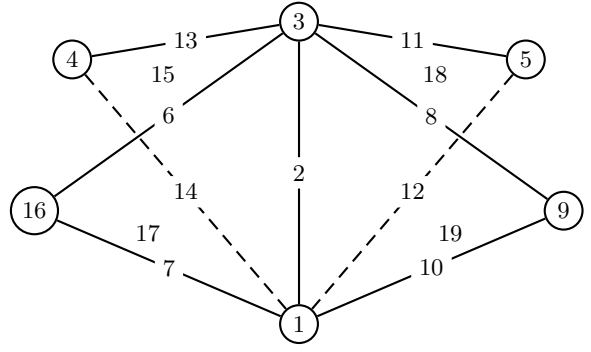
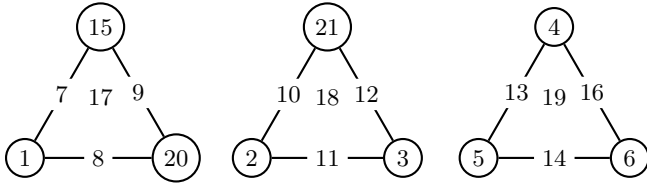
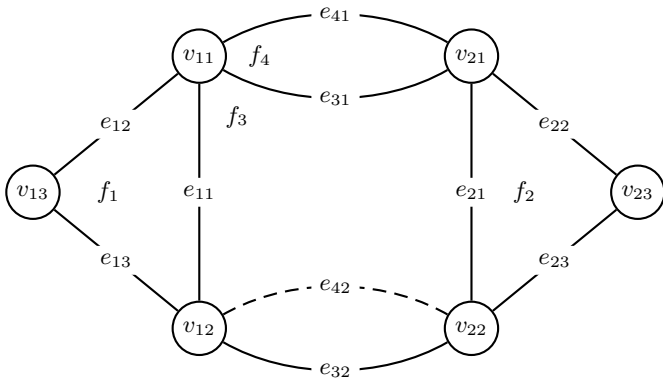
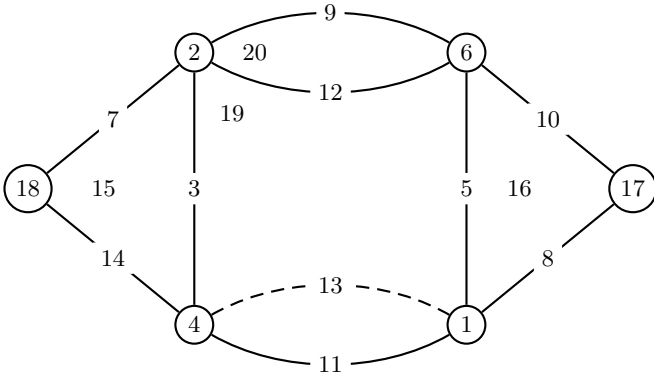
水車型グラフ $C_k^{[\ell]}$ の $[m_v, m_e, m_f]$ **Face Magic** の定和 S は剰余制約式 (8) を満たす. さらに ℓ が偶数の時, 式 (9) を満たす.

$$S \equiv N \pmod{\ell-1} \quad (8)$$

$$S \equiv \frac{\mu_k(\mu_k + 1)}{2} \pmod{\ell-1} \quad (9)$$

証明を省略する. 例えば $\ell = 4, k = 3$ の $C_3^{[4]}$ $[1, 1, 1]$ の定和は $S \equiv 1 \pmod{3}$ を満たし, 3.4 節で示すように 52 から 88 までの値である. ℓ が奇数の場合については今後の検討課題である.

$C_k^{[\ell]}$ の $[1, 1, 1]$ **Face Magic** に対して命題 7 が成り立つ.

図 1: 4 個の三角形が辺を共有する水車型グラフ ($C_3^{[4]}$)図 5: $C_3^{[4]}[1, 1, 1]$ Face Magic ($S : 52$) の構成例図 2: $3C_3[1, 1, 1]$ Face Magic ($S : 77$) の構成例図 3: 2 個の k 角形を 2 個の四角形が 2 個の辺を共有するグラフ (T_k)図 4: グラフ T_k の $[1, 1, 1]$ FM ($S : 63$) の構成例

命題 7 $C_k^{[\ell]}[1, 1, 1]$ Face Magic の定和の剰余制約

水車型グラフ $C_k^{[\ell]}$ の $[1, 1, 1]$ Face Magic の定和 S は剰余制約式 (10), 式 (11) を満たす.

$$S \equiv (2k + 1)(k + 1) \pmod{\ell - 1} \quad (10)$$

$$\begin{cases} S \equiv 6 \pmod{\ell - 1} & (k = \ell) \\ S \equiv 1 \pmod{\ell - 1} & (k = \ell - 1) \\ S \equiv 0 \pmod{\ell - 1} & (k = \ell - 2) \\ S \equiv 3 \pmod{\ell - 1} & (k = \ell - 3) \end{cases} \quad (11)$$

証明を省略する.

3.3 グラフ $C_k^{[\ell]}$ の FM 定和の上限・下限

グラフ $C_k^{[\ell]}$ の定和 S の上限・下限は式 (5) の右辺の第 2 項の最大値・最小値で与えられ, $[1, 1, 1]$ の時は共有する辺とその頂点に $n, n - 1, n - 2$ を配置する時が最大値, $1, 2, 3$ を配置する時が最小値である. 従って命題 8 で与えられる.

命題 8 $C_k^{[\ell]}[1, 1, 1]$ FM の定和の上限・下限

$$\begin{cases} S_{\text{sup}} = 2\ell(k - 1)^2 + (6\ell + 1)(k - 1) + 6 \\ S_{\text{inf}} = 2\ell(k - 1)^2 + 7(k - 1) + 6 \end{cases} \quad (12)$$

$$S_{\text{sup}} - S_{\text{inf}} = 6(\ell - 1)(k - 1) \quad (13)$$

証明を省略する. 命題 7 及び命題 8 の式 (13) から命題 9 が導かれる.

命題 9 $C_k^{[\ell]} [1, 1, 1]$ FM の定和の個数の上限
 $C_k^{[\ell]} [1, 1, 1]$ FM の定和の個数の上限は $6(k-1)+1$
 であり, ℓ に無関係に定まる.

例えば定和の個数の上限は $k = 2, 3, 4$ の時, それぞれ 7, 13, 19 となる.

3.4 定和分布の分類とソルバーによる探索

3.3 節の式 (12) で求めた定和の実現可能な区間 $[S_{\inf}, S_{\sup}]$ の全ての値に対して Magic Graph を構成できるとは限らない. 式 (12) で与えた定和の上限・下限が整数値でありその区間の全ての値に対して Magic Graph を構成できる場合を Perfect, 両端を含めて $\delta > 0$ の等差数列となる定和が構成できる場合を δ -Perfect, 上限・下限の両端は構成できないが他は全て構成できる場合を SemiPerfect, 実現可能な区間に不規則に実現できない定和が出現する場合を Singular と定義した [13].

minisat による SAT ソルバー [14] とその符号化器である sugar を用いた $C_k^{[\ell]} [1, 1, 1]$ Face Magic の解探索の結果を表 1 に示す. 表中の項目, 例えば $k = 3, \ell = 3$ の “44:68 2-P” は三角形 ($k = 3$) 3 個 ($\ell = 3$) $C_3^{[3]}$ の定和の下限・上限が 44, 68 であり $\delta = 2$ の 2-Perfect であることを表している. 表 1 から命題 7 の剰余制約が成り立つことが確認できる. $\ell = 3, k = 2$ の時, 定和は 19 から 31 までの 7 個, $\ell = 3, k = 3$ の時, 定和は 44 から 68 までの 13 個, $\ell = 4, k = 3$ の時, 52 から 88 までの 13 個である. 一方, $\ell = 3, k = 4$ の時, 81 から 117 までの 19 個であり, 命題 9 で述べた定和の個数の上限に一致し, δ -Perfect 性が成り立っている.

表 1: $C_k^{[\ell]} [1, 1, 1]$ Face Magic 定和の分布

k 角形	共有の面の個数 (ℓ)		
	3	4	5
2	19:31 2-P	21:39 3-P	23:47 4-P
3	44:68 2-P	52:88 3-P	60:108 4-P
4	81:117 2-P	99:153 3-P	117:189 4-P
5	130:178 2-P	162:234 3-P	194:290 4-P
6	191:251 2-P	241:331 3-P	291:411 4-P
7	264:336 2-P	336:444 3-P	408:552 4-P
8	349:433 2-P	447:573 3-P	545:713 4-P
9	446:542 2-P	574:718 3-P	702:894 4-P
10	555:663 2-P	717:879 3-P	879:1095 4-P

“A:B δ -P”: 下限, 上限, δ -Perfect

4 むすび

本報告では面で構成されるグラフに対する Face Magic Graph の性質について述べた. 今後の課題は以下の通りである.

1. ℓ が奇数の場合の命題 6 の検討
2. グラフ $C_k^{[\ell]} [m_v, m_e, m_f]$ Face Magic の δ -Perfect 性について

参考文献

- [1] J. Sedláček, Problem 27, in Theory of Graphs and Its Applications, Proc. Symposium Smolenice, pp.163-164 (June 1963).
- [2] W.D. Wallis, E. T. Baskoro, M. Miller, Edge-magic total labelings, Australasian Journal of Combinatorics, 22, pp.177-190 (Jan. 2000).
- [3] 杉山雅英, Magic Graph の一般化とその性質, IPSJ 論文誌, Vol. 59, No.6, pp.1394-1404 (2018-06).
- [4] J. MacDougall, M. Miller, Slamin, W. D. Wallis, Vertex-Magic Total Labelings of Graphs, Utilitas Math., 61, pp.3-21 (2002).
- [5] Ko-Wei Lih, On Magic and Consecutive Labelings of Plane Graphs, Utilitas Math., 24, pp.165-197 (1983).
- [6] M. Bača, On Magic and Consecutive Labelings for the Special Classes of Plane Graphs, Utilitas Math., 32, pp.59-65 (1987).
- [7] M. Bača, et al, A survey of face-antimagic evaluations of graphs, Australasian Journal of Combinatorics, Vol. 69 (3), pp.382-393 (2017).
- [8] 杉山 雅英, 平面グラフの Magic Graph の性質, 情報処理学会東北支部研究会, No.2018-3-5 (2018-12).
- [9] 田茂井 圭祐, 杉山 雅英, k 次元超立方体における Magic Graph の構成の検討, 情報処理学会東北支部研究会, No.2018-3-4 (2018-12).
- [10] 田茂井 圭祐, 杉山 雅英, SAT ソルバーを用いた k 次元超立方体に対する Magic Graph の構成 — Vertex-Magic Total Labeling について —, 情報処理学会東北支部研究会, No. 006KNJ (2019-02).
- [11] J.A. Gallian, A Dynamic Survey of Graph Labeling, Electronic J. of Combinatorics (2016).
- [12] A.M. Marr, W.D. Wallis, Magic Graphs. Second edition, Birkhäuser/Springer, New York. (2013)
- [13] 杉山雅英, SAT ソルバーを用いた正多面体に対する Magic Graph の構成, 情報処理学会東北支部研究会, No.2017-2-3 (2018-02).
- [14] 番原, 他, SAT 技術の進化と応用, 情報処理, Vol.57, No.8, pp.702-737 (2016-08).