A-018

ビットコイン時系列におけるマルチフラクタル性と反持続性
Multifractality and anti-persistence of Bitcoin time series

高石　哲弥‡
Tetsuya Takaishi

1. はじめに

時系列がランダムな変動であるかどうかを判断する方法の１つとしてハースト指数がある。この指数は時系列がランダムウォークである場合、1/2 の値を取る。金融資産時系列を用いたハースト指数の測定では、1/2 に近い値が得られる場合が多い。このことは、時系列がランダムウォークに近いことを示唆しているが、一方でその他の統計分析では単純なランダムウォークでは説明できない性質が現れている。例えば、収益率時系列の自己相関は非常に小さいが、絶対値収益率の時系列は長期の自己相関が現れる。また、時系列のボラティリティ（分散）は時間変動していると考えられているが、ボラティリティが大きな時期や小さな時期が繰り返し現れるボラティリティクラスタリングという現象があり、ボラティリティも長期相関を持っている[1]。また、ハースト指数を拡張した一般化ハースト指数を測定した研究も行われている[2]。その結果、一般化ハースト指数は一定ではなく、このことは収益率時系列がマルチフラクタル性を持ち、ガウス時系列ではないことを示唆している。

収益率時系列の統計的性質を捉えた時系列モデルとして GARCH モデルが存在する[3]。 GARCH モデルはボラティリティクラスタリングの性質をよく捉えることができ、予測モデルとして実証分析や実務で幅広く利用されている。一方、GARCH モデルが生み出す時系列は長期記憶性を持たないことが知られている。このことから、長期記憶性を持たせたモデルの構築も行われている。例えば、非整数ブラウン運動を用いたモデルなどがあり、これらのモデルでは、長期記憶性を実現するために非整数ブラウン運動のハースト指数は H>1/2 の値が取られる。H>1/2 の時系列は持続性があるといわれる。

近年、ボラティリティの変化の時系列に注目した研究が株価に対して行われ、そのハースト指数が 1/2 以下になっていることが報告されている[4]。また、ボラティリティの変化の時系列はマルチフラクタル性を示さずモノフラクタルとなっていることが示されている。ハースト指数が 1/2 以下であることは、時系列の性質が反持続的になっていることを示している。この事実から、ボラティリティの変化を反持続的時系列の性質を持ったモデルによって構築する試みもなされている[4]。

本研究では、ビットコイン価格のボラティリティに注目し、ボラティリティ変化の時系列を解析し、株価のボラティリティ変化に見られるような反持続性があるかどうかをハースト指数によって検証する。

2. データ

本研究では COINBASE 取引所で取引された２０１５年１月２８日から２０１９年１月９日まで価格の Tick データを利用した[5]。Tick データからサンプリング間隔Δt ごとにサンプルされた価格データ$P_{t,i\Delta t}$を作成する。そして、価格データから収益率データ $R_{t,i\Delta t} = lnP_{t,i\Delta t} - lnP_{t,(i-1)\Delta t}$ を構築する。ボラティリティ（分散）は観測量ではないので、実現ボラティリティによって代用する。実現ボラティリティは収益率の 2 乗の和として以下によって定義される[6]。

$$RV_t^{\Delta t} = \sum_{j=1}^{N} R_{t,i\Delta t}^2 \quad (1)$$

本研究では、サンプリング間隔Δt=5 分の収益率から日次実現ボラティリティを構築する。そして、ボラティリティ変化を以下で定義する。

$$LV_t = (\ln(RV_t^{\Delta t}) - \ln(RV_t^{\Delta t}))/2 \quad (2)$$

図 1 は日次ボラティリティ$\left(RV_t^{\Delta t}\right)^{1/2}$ の時系列を表している。ボラティリティが大きい期間や小さい期間が現れ、ボラティリティクラスタリングの特徴が現れている。図 2 はボラティリティ変化の時系列であるが、スムーズな時系列となっている。

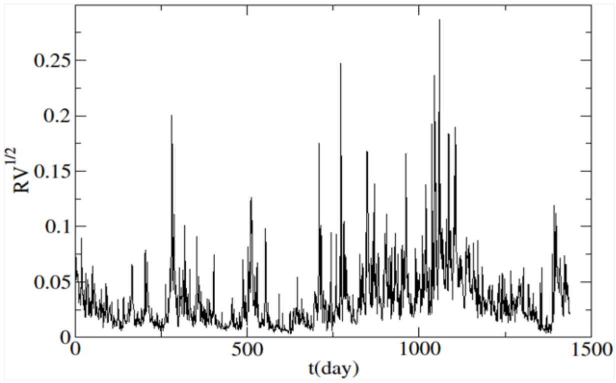

図 1　ボラティリティ RV の時系列

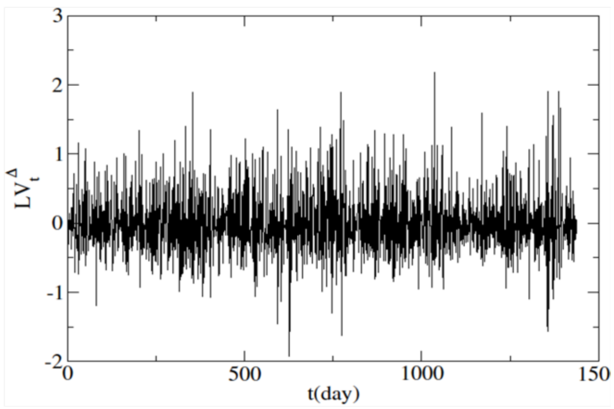

図 2　ボラティリティ変化の時系列

‡広島経済大学　Hiroshima University of Economics

3. Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MFDFA)

一般化ハースト指数の測定は[2]による MDFA 法を利用する。この方法は非定常な時系列にも利用でき、精度よい測定が可能なことが知られている。MFDFA 法は以下の①〜③のステップから成る。

① オリジナルの時系列｛x_t, t=1,...,N｝から次のプロファイル $y(k)$ を作成する。$\bar{x}$ は時系列 x_t の平均値である。

$$y(k)=\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x}) \qquad (3)$$

② プロファイル $y(k)$ を長さ s の $N_s=N/s$ 個のセグメントに分け、セグメント内でトレンドを除去し分散を求める。具体的には、ν 番目のセグメント、$\nu=1,\ldots,N_s$ に対して $F^2(s,\nu)$ を計算する。

$$F^2(s,\nu)=\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}(y[(\nu-1)s+i]-p_\nu(i))^2 \qquad (4)$$

（4）式中の $p_\nu(i)$ はトレンドを除去するための関数で、本研究ではセグメント内のデータを 3 次関数でフィットした関数を利用した。また、N は s の倍数でないときがあるので、最後のデータから順番に並べ、上記の手続きを繰り返す。具体的には、$\nu=N_s+1,\ldots,2N_s$ に対して、以下を計算する。

$$F^2(s,\nu)=\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}(y[N-(\nu-N_s)s+i]-p_\nu(i))^2 \quad (5)$$

③ 計算した分散を利用し、q 次の揺らぎ関数を以下のように定義する。

$$F_q(s)=\left(\frac{1}{2N_s}\sum_{\nu=1}^{2N_s}[F^2(s,\nu)]^{q/2}\right)^{1/q} \qquad (6)$$

もし、時系列が長期のべき的相関を持つなら、（6）式は以下のように振る舞うことが期待される。

$$F_q(s)\sim s^{h(q)} \qquad (7)$$

(7)式から一般化ハースト指数 h(q)を得る。

4. ボラティリティ変化の時系列の解析

ボラティリティ変化のデータから揺らぎ関数(6)式を計算した結果が図３である。q は-25 から 25 までの範囲の値で計算を行った。s が大きい領域で、(7)式に従ってフィッティングを行って h(q)を求めた。

図４の実線（MF−DFA）は求められたボラティリティ変化時系列の h(q)をプロットしたものである。h(q)は 1/2 以下となっており、反持続的時系列となっていることが分かる。これは、[4]が主張する反持続性と一致する。一方、h(q)は q を変えると変化しており、時系列がマルチフラクタル性を持っていることが分かる。[4]では株価時系列のボラティリティ変化はモノフラクタルであると主張しているので、本研究とは一致しない。[4]では、ハースト指数を Structure Function(SF)法によって求めている。図中の SF は SF 法による h(q)であるが、やはり一定ではなく、マルチフラクタル性を示している。

次に反持続性が時系列の非線形な時間相関によるものかどうかを確かめるために、オリジナルな時系列をシャッフ

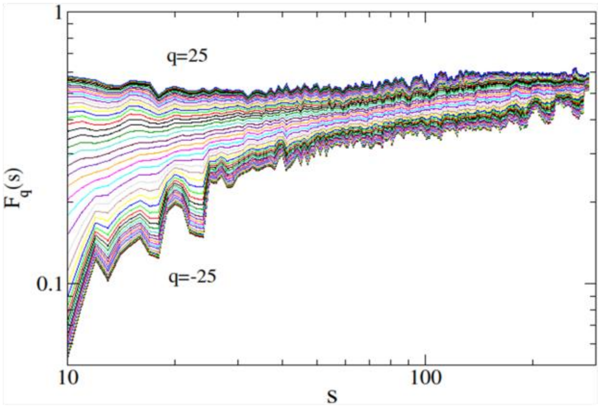

図 3　揺らぎ関数 Fq(s)

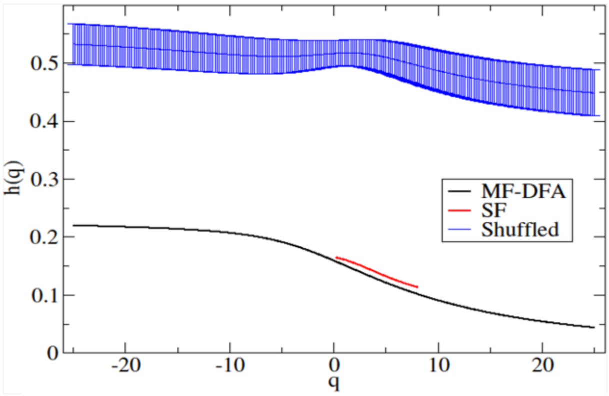

図 4 一般化ハースト指数 h(q)

ルして時間相関をなくした時系列に対してハースト指数を求めた。図中の Shuffled はシャッフルした２０個の時系列から求めた h(q)の平均をプロットしたものである。シャッフル後、h(q)はランダムな時系列の 1/2 付近の値となり、オリジナルな時系列の反持続性は時間相関によって生み出されていることが示唆される。

5. おわりに

ビットコインのボラティリティ変化時系列の一般化ハースト指数を調査した。その結果、一般化ハースト指数は一定ではなく、時系列がマルチフラクタル性を持つことが分かった。この結果は、株価のボラティリティ変化時系列に観測されたモノフラクタル性とは違う結果となっている。今後はこの違いにつて更に調査を行う。

参考文献

[1] R.Cont, “Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues”, Quantitative Finance 10, 223-236(2001) .
[2] J.W.Kantelhardt et. al, “Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series”, Physica A 316, 87-114(2002).
[3] T. Bollerslev, “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity”, Journal of Econometircs 31, 307-327(1986).
[4] J.Gatheral et. al., “Volatility is rough”, Quantitative Finance 18, 933-949(2018).
[5] http://api.bitcoincharts.com/v1/csv/ よりダウンロード
[6] T.G.Andersen and T.Bollerslev, “Answering the skeptics: Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts”, International economic review 39, 885-905(1998).