A-004

内部三角化平面グラフの開矩形勢力描画アルゴリズム

Open Rectangle-of-Influence Drawing Algorithms of Inner Triangulated Plane Graphs

三浦　一之 *
Kazuyuki Miura

概 要

平面グラフ G の描画で，G の全ての点が整数格子点上に置かれ，G の各辺が交差のない直線分で描かれるものを G の格子直線描画と呼ぶ．本論文では，格子直線描画に更なる制約を加えた”開矩形勢力描画”を扱う．G の格子直線描画における各辺 $e = (u, v)$ に対して，e を対角線とする軸平行な長方形の内部を e の開矩形勢力と呼ぶ．G の格子直線描画で，任意の辺の開矩形勢力内に点が存在しない描画を G の開矩形勢力描画と呼ぶ．内部三角化平面グラフ G が開矩形勢力描画を持つための十分条件は知られていたが，必要十分条件は知られていない．　本論文では，内部三角化平面グラフ G が開矩形勢力描画を持つための十分条件を改良するとともに，条件を満足する G の開矩形勢力描画を求めるアルゴリズムを与える．

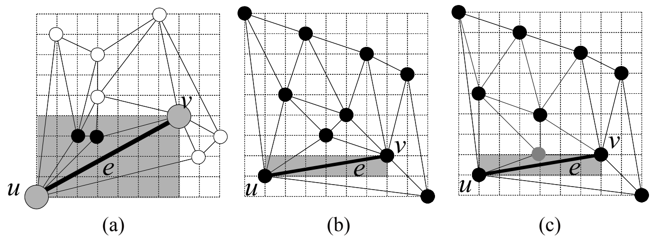

図 1: (a) G の格子直線描画, (b) 閉矩形勢力描画, (c) 開矩形勢力描画.

1　序論

近年，様々な分野で与えられたグラフを「構造を理解しやすく」かつ「きれいに」描画する手法が求められている [1, 2, 3, 4, 5]．図 1(a) のように，平面グラフ G の各点を整数格子の格子点上に配置し，各辺を互いに交差しない直線分として描画したものを G の**格子直線描画**といい，最も基本的な描画法として広く研究されている．しかし，単なる格子直線描画では，特定の箇所に点や辺が密集することがあり，必ずしも「構造を理解しやすく」かつ「きれいな」描画とは限らない．本論文では，格子直線描画に更なる制約を加えた”開矩形勢力描画”を扱う．G の格子直線描画における各辺 $e = (u, v)$ に対して，e を対角線とする軸平行な長方形の内部を e の**開矩形勢力**と呼ぶ．G の格子直線描画で，任意の辺の開矩形勢力内に点が存在しない描画を G の**開矩形勢力描画**と呼ぶ．開矩形勢力描画では，各辺の近傍にその辺の端点以外の点が配置されないので，単なる格子直線描画よりも見やすい場合が多い (図 1)(a) および (c) 参照．)．なお，本論文ではグラフ G の点数を n で表す．また，大きさ $W \times H$ の**整数格子**は $W+1$ 本の垂直線分と $H+1$ 本の水平線分およびそれらの交点からなり，その外周は矩形であるとする．W は整数格子の**幅**，H は**高さ**という．整数格子の幅を W，高さを H とする．格子サイズは $W \times H$ と表す．

内部三角化グラフ G が開矩形勢力描画を持つための十分条件は知られており，G がその条件を満たすならば，G を $(n-1) \times (n-1)$ の格子内に開矩形勢力描画する線形時間アルゴリズムが知られている [3]．更に，三浦らは [3] の十分条件を改良し，G がその条件を満たすならば，G を $(n-1) \times (n-1)$ の格子内に開矩形勢力描画する線形時間アルゴリズムを与えた [4]．しかし，G が開矩形勢力描画を持つための必要十分条件は知られていない．

本論文では，[4] で与えられた十分条件を改良する．即ち，内部三角化グラフ G が開矩形勢力描画を持つための十分条件を拡張するとともに，G がその条件を満たすならば，G を $(n-1) \times (n-1)$ の格子内に開矩形勢力描画する線形時間アルゴリズムを与える．

*福島大学 理工学群 共生システム理工学類

2　準備

本節では，いくつかの定義と既知の補題を与える．グラフ G は点の集合 V と辺の集合 E からなり，$G = (V, E)$ で表す．辺交差なしに描画できるグラフを**平面グラフ**という．平面グラフ G は平面を連結する領域に分割する．その各領域を**面**という．無限面を**外面**とし，外面以外の面は**内面**と定義する．これらの面の境界は**面閉路**と呼ばれる．G の外面閉路を $C_o(G)$ によって表す．$C_o(G)$ の点は**外点**とし，$C_o(G)$ 上にない点は**内点**とする．G の 3 点からなる閉路を**三角形**と呼ぶ．G の三角形で内部に点が存在するものを G の**充填三角形**と呼ぶ．グラフ G の全ての内面が三角形であるならば，G を**内部三角化グラフ**という．G の三角形で内部に点が存在するものを G の**充填三角形**と呼ぶ．C を G の充填三角形とするとき，$G(C)$ を C および C の内部にある全ての点から誘導される部分グラフとする．

平面グラフ G の格子直線描画における各辺 $e = (u, v)$ に対して，e を対角線とする軸平行な長方形を e の**矩形勢力**と呼ぶ．さらに，e の矩形勢力が長方形の境界線を含むならば，**閉矩形勢力**と呼び，境界線を含まないならば，**開矩形勢力**と呼ぶ．

平面グラフ G の格子直線描画で，全ての辺の閉（開）矩形勢力内に長方形の端点以外の点が含まれないものを G の**閉（開）矩形勢力描画**と呼ぶ．図 1(b) および (c) に閉矩形勢力描画と開矩形勢力描画の例を示す．

以下の補題が知られている．

補題 2.1 [4] 平面グラフ G が閉矩形勢力描画を持つための必要十分条件は，G が充填三角形を持たないことである．

G を内部三角化平面グラフとする．もし G が充填三角形を持たないならば，補題 2.1 より G は開矩形勢力描画を持つことが容易にわかる．よって，一般性を失うことなく G は充填三角形を持つとしよう．$C_1, C_2, \cdots, C_k, k \geq 1$ を G の極大な充填三角形とし，G から $1 \leq i \leq k$ なる各 C_i の内部の点を取り除いたグラフを G^* と書く．このとき，G を $1 \leq i \leq k$ なる各 $G(C_i)$ と G^* に分割してそれぞれ描画した後に各 $G(C_i)$

の描画 $D(G_{(}C_i))$ と G^* の描画 D^* をあわせることにより G の開矩形勢力描画 D を求めることができる．

$G_{(}C_i)$ が開矩形勢力描画 $D(G_{(}C_i))$ をもつ条件は [4] で与えられている．G^* について，全ての辺が斜辺であると仮定し，この G^* が開矩形勢力描画 D^* をもつかどうかを，各角に対する**ラベル付け**によって表すものとする．

ラベルは，各点に接続する連続した 2 本の辺によって構成される角に，軸線が何本含まれているかを示している (図 2 参照)．G^* の内面の角を**内角**といい，外面の角を**外角**という．このラベル付けを用いた以下の補題が知られている．

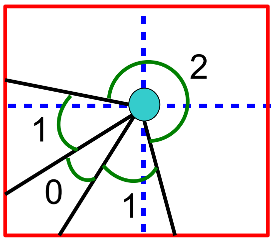

図 2: ラベル付け．

補題 2.2 [3] 内部三角化平面グラフ G が以下の条件 (a)-(c) を満足するラベル付けを持つならば，G は開矩形勢力描画を持つ．

(a) 点の周りのラベルの合計は 4 になる．

(b) G^* の全ての内面三角形 C には，ラベル 0，1，1 がある．C が G の極大充填三角形であるならば，C のラベル 0 の点は，C の内部グラフ $G(C)$ の全ての点に隣接している．

(c) ラベル 0 の外角は高々1 つである．

3 十分条件の拡張

本節では内部三角化平面グラフが開矩形勢力描画を持つための十分条件に関して，補題 2.2 の条件 (c) を改良した次の定理を与える．

定理 1 内部三角化平面グラフ G が開矩形勢力描画を持つための十分条件は，次の (a)-(c) の条件を満たしていることである．

(a) 点の周りのラベルの合計は 4 になる．

(b) G^* の全ての内面三角形 C には，ラベル 0，1，1 がある．C が G の極大充填三角形であるならば，C のラベル 0 の点は，C の内部グラフ $G(C)$ の全ての点に隣接している．

(c) $k \geq 0$ なる k に対して，ラベル 0 の外角を持つ点を v_1, v_2, $\cdots$, v_k とし，これらは G の外周上時計回りにこの順に表れるとする．このとき，もし $k \geq 2$ ならば，$1 \leq i \leq k$ なる各 i に対して，外周上で v_i と v_{i+1} の間にラベル 2 以上の外角が少なくとも 1 つ存在する．ただし，$v_{k+1} = v_1$ とする．

4 アルゴリズムの概要

[3, 4] のアルゴリズムを用いることにより，G のラベル 0 の外角が高々1 である場合には，開矩形勢力描画をすることができる．よって，G にラベル 0 の外角が 2 つ以上存在する場合について考える．$k \geq 2$ なる k に対して，ラベル 0 の外角を持つ点を v_1, v_2, $\cdots$, v_k とし，これらは G の外周上時計回りにこの順に表れるとする．以下にアルゴリズムの概略を示す．

<Step 1> $1 \leq i \leq k-1$ なる各 i に対して，v_i と v_{i+1} の間に存在する外角のラベルの合計を算出する．

<Step 2> ラベルの合計が最大の区間に存在するラベル 1 の外角を全てダミー辺を用いてなくす．

<Step 3> ラベルの合計が最大の区間に隣接するラベル 0 の外角をひとつダミー辺を用いてなくす．

<Step 4> もし外角のラベルに 0 が 2 つ以上存在しているならば，<Step 1> に戻り，アルゴリズムを繰り返す．もしラベル 0 の外角が 1 つ以下であれば，[4] のアルゴリズムを用いて G^* の開矩形勢力描画を求める．

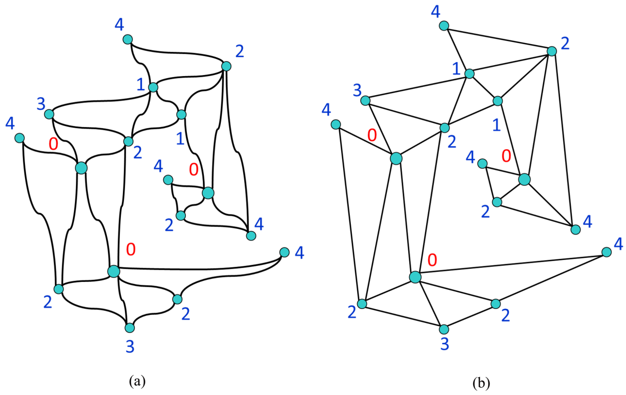

図 3: (a) 外角のラベル付け, (b) (a) の入力に対する開矩形勢力描画．

本アルゴリズムは，データ構造を工夫することにより線形時間で実装することができる．したがって，次の定理が成り立つ

定理 2 定理 1 の条件 (a)-(c) を満足する内部三角化平面グラフは，線形時間で $(n-1) \times (n-1)$ の格子内に開矩形勢力描画できる．

謝辞

本研究は福島大学学内競争的研究資金 (19RI014) の助成を受けたものです．本研究を行うにあたり，有益なコメントを多数頂いた角南祐貴君に深く感謝いたします．

参考文献

[1] T. Biedl, A. Bretscher and H. Meijer, Rectangle of influence drawings of graphs without filled 3-cycles, Proc. of Graph Drawing 1999, LNCS 1731, Springer, pp. 359-368, (2000).

[2] G. Liotta, A. Lubiw, H. Meijer and S. H. Whitesides, The rectangle of influence drawability problem, Comput. Geom. Theory and Applications, 10, 1, pp. 1-22, (1998).

[3] K. Miura and F. Kimura, Sufficient Condition for Open Rectangle-of-Influence Drawings of Inner Triangulated Plane Graphs, Forum on Information Technology (FIT2010), 1, 1, pp.229-230, (2010).

[4] K. Miura, T. Matsuno and T. Nishizeki, Open rectangle-of-influence drawings of inner triangulated plane graphs, Discrete and Computational Geometry, 41, pp. 643-670, 2009.

[5] T.Nishizeki and M.S.Rahman, Planer Graph Drawing, World Scientific, Singapore, (2004).