

三次元 DFT 領域における動画像の疎性：理論解析と統計的評価 Sparsity of a Moving-Image Sequence in the 3-D DFT Domain: Theoretical Analysis and Statistical Evaluations

齊藤 隆弘[†] 小松 隆[†]
Takahiro Saito Takashi Komatsu

1. はじめに

筆者らは、先に、三次元平均値分離型短時間 DFT (3-D Mean-Separation-type Short-Time DFT: 3-D MS²T-DFT) を動画像雑音除去に適用し [1] ~ [2], CVBM3D [3], [4] や V-BM4D [5] 等の世界最高水準の動画像雑音除去手法よりも優れた雑音除去性能を示すことを実験的に明らかにしている [6]. 筆者らは、三次元 DFT が動画像処理や動画像解析の強力なツールであることに着目し、ここ数年、自然動画像の三次元 DFT 係数の統計的モデリングについての研究に取り組み、“信号の疎性と劣化モデルを明示的に含み、画像復元への応用に有用な形式”で統計的モデリングを行う手法、すなわち二成分混合型球対称ガウス分布 (2-Component Spherically-Symmetric Gaussian Mixture Distribution: 2-C S²GM) のモデルパラメータ推定を通じた統計的モデリング法を考案している [6] ~ [8]. 本研究では、動画像の三次元 DFT 係数の疎性を理論的に解析するとともに [9], 筆者らの 2-C S²GM 分布モデルに基づく統計的モデリング手法を用いて実動画像の三次元 DFT 係数が有する疎性を定量的に評価し、動画像信号の三次元 DFT 領域における“疎性”を、理論と実験の両面から明らかにする。

2. 画像変換と画像処理

JPEG および MPEG において二次元 DCT が用いられた 1980 年代以降、二次元 DCT が最も効率的な画像変換法と認識され、画像処理に広く応用されてきた。一方、DFT については、1980 年に M.I.T. の J. S. Lim により、二次元短時間 DFT を用いた静止画像雑音除去法が提案されたが [10], 他方式と比較して必ずしも高い性能を示さなかった。これは、画像信号において重要な情報を担っている局所的な直流分の取り扱いを疎かにしていたことによる。また、その後、二次元短時間 DFT の画像処理への応用に関する進展は見られなかった。

静止画像信号に対しては、二次元 DFT と二次元 DCT では、その変換係数は、本質的に類似した“信号の表現効率 (信号表現の疎性)”を示す。一方、動画像信号に対しては、三次元 DFT と三次元 DCT は、“信号の表現効率 (信号表現の疎性)”の観点で本質的な差異を示す。すなわち、三次元 DCT では、暗黙の裡になされている三次元時空間信号の偶対称化が、表現効率の劣化、すなわち表現の疎性の低下を誘発する。このため、結果的に、三次元 DFT では、三次元 DCT に比較し、より有効な、すなわちより高い疎性の動画像表現が達成される [1], [2]. そこで、筆者らは、動画像信号に対する三次元短時間 DFT の表現効率をさらに高めるため、三次元短時間 DFT に局所平均値分離を導入した方式、すなわち三次元平均値分離型短時間 DFT

(3-D MS²T-DFT) を提案した [1], [2].

3. 動画像の三次元 DFT 係数の疎性の理論解析

筆者らは先に、動画像の平行移動生成モデルを仮定した理論解析を行い、三次元フーリエ変換は三次元コサイン変換と比較して信号表現の疎性の観点から優位であることを明らかにした [1],[2]. 筆者らが先に文献[1],[2]で述べた“動画像の三次元フーリエ変換の疎性に関する理論解析”は、アナログ動画像に対するものであり、デジタル動画像に対しては、示唆的な意義を有するに留まる。そこで、ここでは、デジタル動画像と動きの関係の本質を保ちつつ、極力簡素な近似的状況設定の下で、理論解析を行う [9]. 具体的には、三次元 DFT に適合するように、“動き”を“整数値の巡回シフト型の平行移動”に限定した“デジタル動画像の巡回シフト型平行移動生成モデル”を想定し、理論解析を行う。

3.1 $N \times N \times N$ のサイズの三次元 DFT の場合

まず、整数値の巡回シフト型平行移動の動きベクトル \vec{v} を次式にて定義する。

$$\vec{v} := (m_1, m_2)^T; \quad 0 \leq m_1, m_2 \leq N-1 \quad (3.1)$$

デジタル静止画像 s_{n_1, n_2} の二次元 DFT 係数を S_{k_1, k_2} と表記する。このとき、デジタル動画像 $\hat{f}_{n_1, n_2, n_3}^{(m_1, m_2)}$ の巡回シフト型平行移動生成モデルを次式にて定義する。

$$\hat{f}_{n_1, n_2, n_3}^{(m_1, m_2)} := s_{\text{mod}(n_1 - m_1 \times n_3, N), \text{mod}(n_2 - m_2 \times n_3, N)} \cdot \varepsilon_{n_3} \quad (3.2)$$

なお、 ε_{n_3} は直流関数である。このとき、デジタル動画像 $\hat{f}_{n_1, n_2, n_3}^{(m_1, m_2)}$ の三次元 DFT 係数 $\hat{F}_{k_1, k_2, k_3}^{(m_1, m_2)}$ は、デジタル静止画像 s_{n_1, n_2} の二次元 DFT 係数 S_{k_1, k_2} を用いて次式にて表現される。

$$\hat{F}_{k_1, k_2, k_3}^{(m_1, m_2)} = N \cdot S_{k_1, k_2} \cdot \delta(\text{mod}(m_1 k_1 + m_2 k_2 + k_3, N)) \quad (3.3)$$

3.1.1 三次元 DFT 係数の疎性度の平均的な評価

式(3.3)の三次元 DFT 係数 $\hat{F}_{k_1, k_2, k_3}^{(m_1, m_2)}$ の表現は、角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) が $\text{mod}(m_1 k_1 + m_2 k_2 + k_3, N) = 0$ の条件を満たす場合にのみ、三次元 DFT 係数 $\hat{F}_{k_1, k_2, k_3}^{(m_1, m_2)}$ が非零の値を有することを意味している。よって、動きベクトル \vec{v} が指定されたとき、この非零条件を満足する角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) の集合 $\mathbb{A}_{(m_1, m_2)}$ は、明らかに次式にて与えられる。

$$\mathbb{A}_{(m_1, m_2)} = \left\{ (i, j, k) \left| \begin{array}{l} 0 \leq i \leq N-1, 0 \leq j \leq N-1, \\ k = \text{mod}(N - (m_1 i + m_2 j), N) \end{array} \right. \right\} \quad (3.4)$$

この集合 $\mathbb{A}_{(m_1, m_2)}$ の濃度 $N_{Z; m_1, m_2} := \#\{\mathbb{A}_{(m_1, m_2)}\}$ は N^2 であり、DFT 係数の総数 N^3 よりもつねに小さい。

また、三次元 DFT 係数の疎性度 $S_p^{(m_1, m_2)}$ は、次式にて定義され、 $1 - 1/N$ となる。

$$S_p^{(m_1, m_2)} := 1 - \frac{N_{Z; m_1, m_2}}{N^3} = 1 - \frac{1}{N} \quad (3.5)$$

[†] 神奈川大学, Kanagawa University

すなわち、三次元 DFT 係数の疎性度 $S_p^{(m_1, m_2)}$ は、三次元 DFT の解析サブブロックのサイズ N とともに単調に増加し、1 に漸近する。

さらに、巡回シフト型平行移動の動きベクトルが確率的に一樣に生起するものと仮定すると、巡回シフト型平行移動によって生成されたデジタル動画像の三次元 DFT 係数の“非零の有意な係数値の生起確率 P_{NZ} ”は、平均的には $1/N$ のオーダーであると近似的に評価される。すなわち、次式に示すように近似評価される。

$$P_{NZ} := E \left[\text{Prob} \left\{ \widehat{F}_{k_1, k_2, k_3}^{(m_1, m_2)} \neq 0 \right\} \right] \\ \approx \frac{1}{N^2} \sum_{(m_1, m_2) \in [0, N-1]^2} N_{Z; m_1, m_2} \propto O \left(\frac{1}{N} \right) \quad (3.6)$$

よって、明らかに、デジタル動画像の三次元 DFT は、元のアナログ静止画像の二次元 DFT に比較してより強い疎性を有する。実際のデジタル動画像では、勿論、その動きを“整数値の巡回シフト型平行移動”として単純にモデル化することはできないが、上記に示した考察によって、静止画像の二次元 DFT 係数と比較し、動画像の三次元 DFT 係数がなぜより強い疎性を有するのかを、定性的に説明できる。

実際の動画像には、より複雑な動き、照明の変化、カメラ由来のランダム雑音、量子化雑音等の種々な要因に起因した時空間的な三次元信号変動が含まれており、これらの三次元信号変動の三次元 DFT 係数は、明確な疎性を持たないものと推測される。こうした考察を通して、“動画像の三次元 DFT 係数の確率分布を、二成分混合型分布（単純な動き由来の時空間的信号変動成分とその他の要因由来の時空間的信号変動成分の二成分の各々に対応した二つの確率分布を混合した確率分布）としてモデル化する”ことの妥当性が示唆される。

3.1.2 三次元 DFT 係数の疎性度の角周波数毎の評価： 8×8 の解析サブブロックの場合

巡回シフト型平行移動生成モデルによってデジタル静止画像から生成されたデジタル動画像の $8 \times 8 \times 8$ の三次元 DFT の疎性を、角周波数インデックス毎に評価する。

まず、整数値の巡回シフト型平行移動の動きベクトル \vec{v} を次式に示した範囲内の未知パラメータとして定義する。

$$\vec{v} := (m_1, m_2)^T; \quad 0 \leq m_1 \leq 7, \quad 0 \leq m_2 \leq 7 \quad (3.7)$$

さらに、次式の範囲内の数値として角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) を指定する。

$$0 \leq k_1, k_2, k_3 \leq 7 \quad (3.8)$$

上記の設定の下で“指定されたある角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) の三次元 DFT 係数が非零となる”ための動きベクトル \vec{v} を求める問題は、二つの整数変数 (m_1, m_2) を未知数とした次式の“二変数一次合同方程式の求解問題”として定式化される。

$$\text{mod}(m_1 k_1 + m_2 k_2 + k_3, 8) = 0; \quad 0 \leq m_1, m_2 \leq 7 \quad (3.9)$$

この二変数一次合同方程式の解の個数の解析を通し、三次元 DFT 係数の疎性を、角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) 毎に理論的に評価する。

DFT 係数の角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) を以下に示すように場合分けし、式(3.9)の二変数一次合同方程式の求解とその解の個数 $N_{Z; k_1, k_2, k_3}$ について論じる。なお、以降

では、角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) の定義範囲を限定した集合を、次式にて表記する。

$$\Omega_{(8,8,8)} := \{(k_1, k_2, k_3) \mid 0 \leq k_1, k_2, k_3 \leq 7\} \quad (3.10)$$

$$\Omega_{(4,4,4)} := \{(2k_1, 2k_2, 2k_3) \mid 0 \leq k_1, k_2, k_3 \leq 3\} \quad (3.11)$$

$$\Omega_{(2,2,2)} := \{(4k_1, 4k_2, 4k_3) \mid 0 \leq k_1, k_2, k_3 \leq 1\} \quad (3.12)$$

【式(3.9)の二変数一次合同方程式の求解と解の個数】

Case #1: $k_1 = k_2 = 0$ の場合、すなわち、角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) が次式にて定義された部分集合 G_1 の要素として指定される場合である。

$$G_1 := \{(k_1, k_2, k_3) \mid k_1 = k_2 = 0, 0 \leq k_3 \leq 7\} \subset \Omega_{(8,8,8)} \quad (3.13)$$

さらに、この部分集合 G_1 を互いに排反な二つのサブ部分集合に直和分割して取り扱う。

1) Case #1-1: $k_3 = 0$ の場合、すなわち、角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) が次式にて定義されたサブ部分集合 G_{1-1} の要素として指定される場合である。

$$G_{1-1} := \{(k_1, k_2, k_3) \mid k_1 = k_2 = k_3 = 0\} \subset \Omega_{(8,8,8)} \quad (3.14)$$

このサブ部分集合 G_{1-1} の濃度（元の個数）は、次式で与えられる。

$$\#[G_{1-1}] = 1 \quad (3.15)$$

また、この場合、明らかに、式(3.9)の二変数一次合同方程式の全ての解 (m_1, m_2) は、次式にて与えられる。

$$(m_1, m_2); \quad 0 \leq m_1, m_2 \leq 7 \quad (3.16)$$

よって、“解の個数”は、 $8^2 = 64$ 個である。

2) Case #1-2: $k_3 \neq 0$ の場合、すなわち、角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) が次式にて定義されたサブ部分集合 G_{1-2} の要素として指定される場合である。

$$G_{1-2} := \{(k_1, k_2, k_3) \mid k_1 = k_2 = 0, 1 \leq k_3 \leq 7\} \subset \Omega_{(8,8,8)} \quad (3.17)$$

このサブ部分集合 G_{1-2} の濃度（元の個数）は、次式で与えられる。

$$\#[G_{1-2}] = 7 \quad (3.18)$$

また、この場合、明らかに、式(3.9)の二変数一次合同方程式の解 (m_1, m_2) は存在せず、“解の個数”は、0 個である。

Case #2: Case #1 ではなく、且つ $\{k_1, k_2: \text{even}, k_3: \text{odd}\}$ の場合、すなわち、角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) が次式にて定義された部分集合 G_2 の要素として指定される場合である。

$$G_2 := \overline{G_1} \cap \mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_2 - \mathbb{E}_2 \subset \Omega_{(8,8,8)},$$

$$\mathbb{F}_2 := \left\{ (k_1, k_2, k_3) \mid \begin{array}{l} \text{mod}(k_1, 2) = \text{mod}(k_2, 2) = 0 \ \& \\ \text{mod}(k_3, 2) = 1 \end{array} \right\}, \quad (3.19)$$

$$\mathbb{E}_2 := \{(k_1, k_2, k_3) \mid k_1 = k_2 = 0 \ \& \ \text{mod}(k_3, 2) = 1\}$$

この部分集合 G_2 の濃度（元の個数）は、次式にて評価される。

$$\#[G_2] = \#[\mathbb{F}_2] - \#[\mathbb{E}_2] = \frac{8^3}{8} - 4 = 60 \quad (3.20)$$

また、この場合、 $\{k_1, k_2: \text{even}, k_3: \text{odd}\}$ であるので、 $(m_1 k_1 + m_2 k_2 + k_3)$ は、 m_1, m_2 によらず、必ず奇数である。よって、次式が成立する。

$$\text{mod}(m_1 k_1 + m_2 k_2 + k_3, 2) = 1 \quad (3.21)$$

この関係は、式(3.9)の二変数一次合同方程式と矛盾する。したがって、明らかに、式(3.9)の二変数一次合同方程式の解 (m_1, m_2) は存在せず、“解の個数”は、0 個である。

Case #3: Case #1 及び Case #2 ではなく、且つ $(k_1, k_2, k_3, 8)$ が互いに素な場合、すなわち、角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) が次式にて定義された部分集合 \mathbb{G}_3 の要素として指定される場合である。

$$\mathbb{G}_3 := \{(k_1, k_2, k_3) | n \triangleq \text{GCM}(k_1, k_2, k_3, 8) = 1\} \cap \overline{\mathbb{G}_2} \cap \overline{\mathbb{G}_1} \quad (3.22)$$

ただし、 $\text{GCM}(i, j, k, l)$ は、非負の整数の組 (i, j, k, l) の最大公約数である。この場合、 $(k_1, k_2, k_3, 8)$ が互いに素であるので、角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) が全て偶数であることはない。また、Case #1 と Case #2 ではないので、角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) は次式の関係を満たす。

$$(k_1, k_2, k_3) \neq \{k_1, k_2 : \text{even}, k_3 : \text{odd}\} \quad (3.23)$$

よって、二つのパラメータ k_1, k_2 の少なくともいずれか一方は、必ず奇数である。これらのことより、部分集合 \mathbb{G}_3 は、次式に示すように表現される。

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_3 &:= \overline{\mathbb{G}_1} \cap \overline{\mathbb{G}_2} \cap \mathbb{F}_3 = \mathbb{F}_3 - \mathbb{F}_2 = \Omega_{(8,8,8)} - \mathbb{E}_3 - \mathbb{F}_2 \subset \Omega_{(8,8,8)}, \\ \mathbb{F}_3 &:= \{(k_1, k_2, k_3) | \text{GCM}(k_1, k_2, k_3, 8) = 1\} \\ &= \Omega_{(8,8,8)} - \mathbb{E}_3 \subset \Omega_{(8,8,8)}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_3 &:= \left\{ (k_1, k_2, k_3) \left| \begin{array}{l} \text{mod}(k_1, 2) = \text{mod}(k_2, 2) \\ = \text{mod}(k_3, 2) = 0 \end{array} \right. \right\} \subset \Omega_{(8,8,8)}, \\ \mathbb{F}_2 &:= \left\{ (k_1, k_2, k_3) \left| \begin{array}{l} \text{mod}(k_1, 2) = \text{mod}(k_2, 2) = 0 \ \& \\ \text{mod}(k_3, 2) = 1 \end{array} \right. \right\} \subset \Omega_{(8,8,8)} \end{aligned}$$

よって、この部分集合 \mathbb{G}_3 の濃度 (元の個数) は、次式にて評価される。

$$\#\mathbb{G}_3 = \#\left[\Omega_{(8,8,8)}\right] - \#\mathbb{E}_3 - \#\mathbb{F}_2 = 8^3 - \frac{8^3}{8} - \frac{8^3}{8} = 384 \quad (3.25)$$

次に、式(3.9)の二変数一次合同方程式の解を求める。まず、二つのパラメータ k_1, k_2 の少なくともいずれか一方は、必ず奇数であるので、明らかに次式が成立する。

$$\text{GCM}(k_1, 8) = 1 \quad \text{or} \quad \text{GCM}(k_2, 8) = 1 \quad (3.26)$$

ただし、 $\text{GCM}(i, j)$ は、二つの非負の整数の対 (i, j) の最大公約数である。上式は、二つのパラメータ k_1, k_2 の少なくともいずれか一方が、8 とは互いに素であることを意味している。ここで、一般性を失うことなく、 k_2 と 8 とが互いに素であると仮定する (k_1 と 8 とが互いに素であると仮定した場合にも下記と同様な議論が成立する)。すなわち、次式を仮定する。

$$\text{GCM}(k_2, 8) = 1 \quad (3.27)$$

このとき、中国人の剰余定理より明らかに、次式の連立一変数一次合同方程式は、

$$\text{mod}(I, k_2) = 0 \quad \& \quad \text{mod}(I, 8) = 1 \quad (3.28)$$

$0 \leq I < 8k_2$ の範囲内に唯一の整数解 I をもつ。この整数解 I は、次式にて表現される。

$$I = \tilde{i} \times k_2 = 8\tilde{l} + 1; \quad \exists \tilde{i}, \tilde{l} : \text{Integer} \quad (3.29)$$

上式中の整数 \tilde{i} を式(3.9)の二変数一次合同方程式の両辺に乗算する。このとき、式(3.9)の二変数一次合同方程式の角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) の各々に整数 \tilde{i} を乗算した整数を、次式に示すように表現する。

$$\tilde{k}_1 := \tilde{i} \times k_1 = 8\tilde{l} + \tilde{r}; \quad \tilde{r} := \text{mod}(\tilde{k}_1, 8), \quad \exists \tilde{l} : \text{Integer} \quad (3.30)$$

$$\tilde{k}_2 := \tilde{i} \times k_2 = 8\tilde{l} + 1 \quad (3.31)$$

$$\tilde{k}_3 := \tilde{i} \times k_3 \quad (3.32)$$

式(3.9)の二変数一次合同方程式は、次式に示すように表現されるが、

$$m_1 k_1 + m_2 k_2 + k_3 = 8\tilde{l}; \quad \exists \tilde{l} : \text{Integer} \quad (3.33)$$

この式の両辺を整数 \tilde{i} 倍すると、次式に示すように表現される。

$$\tilde{r} \cdot m_1 + m_2 + \tilde{k}_3 = 8(\tilde{i} \cdot \tilde{l} - \tilde{l} \cdot m_1 - \tilde{l} \cdot m_2) \quad (3.34)$$

この式は、次式の二変数一次合同方程式と等価であるので、

$$\text{mod}(\tilde{r} \cdot m_1 + m_2 + \tilde{k}_3, 8) = 0 \quad (3.35)$$

さらに、次式に示すように書き直せる。

$$\tilde{r} \cdot m_1 + m_2 + \tilde{k}_3 = 8\tilde{l}; \quad \exists \tilde{l} : \text{Integer} \quad (3.36)$$

上式より明らかに、式(1.3)の題意の二変数一次合同方程式の全ての解 (m_1, m_2) は、次式にて与えられる。

$$\begin{aligned} m_2 = \text{mod}(8\tilde{l} - \tilde{r} \cdot m_1 - \tilde{k}_3, 8) = \text{mod}(-\tilde{r} \cdot m_1 - \tilde{k}_3, 8) \\ , \quad 0 \leq m_1 \leq 7 \end{aligned} \quad (3.37)$$

よって、“解の個数”は、8個である。

Case #4: Case #1 ではなく、且つ $(k_1, k_2, k_3, 8)$ が互いに素でない場合、すなわち、角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) が次式にて定義された部分集合 \mathbb{G}_4 の要素として指定される場合である。

$$\mathbb{G}_4 := \{(k_1, k_2, k_3) | n \triangleq \text{GCM}(k_1, k_2, k_3, 8) > 1\} \cap \overline{\mathbb{G}_1} \subset \Omega_{(8,8,8)} \quad (3.38)$$

この場合について、まず、式(3.9)の二変数一次合同方程式の解を求める。 $8 = 2^3$ であるので、 $(k_1, k_2, k_3, 8)$ の最大公約数 n は、必ず次式に示すように与えられる。

$$n := \text{GCM}(k_1, k_2, k_3, 16) = 2, 4 \quad (3.39)$$

ここで、式(3.9)の二変数一次合同方程式の三つのパラメータ (k_1, k_2, k_3) 、及び整数値 8 は、各々、最大公約数 n を用いて次式にて表現される。

$$k_1 = n \times \tilde{k}_1, \quad k_2 = n \times \tilde{k}_2, \quad k_3 = n \times \tilde{k}_3, \quad 8 = n \cdot \tilde{N}; \quad \tilde{N} = 4, 2 \quad (3.40)$$

また、上式中の三つの整数パラメータ $(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3)$ は、次式の範囲内の整数値をとる。

$$0 \leq \tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3 \leq \tilde{N} - 1 \quad (3.41)$$

このとき、式(3.9)の二変数一次合同方程式は、次式のように表現される。

$$\begin{aligned} \text{mod}(m_1 k_1 + m_2 k_2 + k_3, 8) \\ \Leftrightarrow \text{mod}(m_1 \tilde{k}_1 + m_2 \tilde{k}_2 + \tilde{k}_3, \tilde{N}) = 0; \quad 0 \leq m_1, m_2 \leq 7 \end{aligned} \quad (3.42)$$

すなわち、次式のパラメータ設定の下で、

$$\tilde{N} = 4, 2; \quad 0 \leq \tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3 \leq \tilde{N} - 1 \quad (3.43)$$

次式の二変数一次合同方程式を解く問題に書き換えられる。

$$\text{mod}(m_1 \tilde{k}_1 + m_2 \tilde{k}_2 + \tilde{k}_3, \tilde{N}) = 0, \quad 0 \leq m_1, m_2 \leq 7 \quad (3.44)$$

ここで、四つのパラメータ $(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3, \tilde{N})$ は、明らかに互いに素である。すなわち、次式が成立する。

$$\tilde{n} \triangleq \text{GCM}(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3, \tilde{N}) = 1 \quad (3.45)$$

このとき、次式の二変数一次合同方程式は、

$$\text{mod}(\tilde{m}_1 \tilde{k}_1 + \tilde{m}_2 \tilde{k}_2 + \tilde{k}_3, \tilde{N}) = 0, \quad 0 \leq \tilde{m}_1, \tilde{m}_2 \leq \tilde{N} - 1 \quad (3.46)$$

式(3.44)の二変数一次合同方程式の部分問題であり、また、 $(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2) \neq (0, 0)$ であるので、

1) $\{\tilde{k}_1, \tilde{k}_2 : \text{even}, \tilde{k}_3 : \text{odd}\}$ ならば、前記の Case #2 に相当し、

解は存在しない. 結局, 式(3.9)の二変数一次合同方程式の“解の数”は, 0 個である.

2) $\{\tilde{k}_1, \tilde{k}_2 : \text{even}, \tilde{k}_3 : \text{odd}\}$ でないならば, 前記の Case #3 に相当し, \tilde{N} 個の解が存在する. この解の一つを $(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2)$ と表記すると, 次式で定義された整数対 $(\tilde{m}_1^{(i)}, \tilde{m}_2^{(j)})$ は,

$$\begin{aligned} & (\tilde{m}_1^{(i)}, \tilde{m}_2^{(j)}) \\ & ; \tilde{m}_1^{(i)} := \tilde{m}_1 + i \cdot \tilde{N}, \tilde{m}_2^{(j)} := \tilde{m}_2 + j \cdot \tilde{N}; 0 \leq i, j \leq n-1 \end{aligned} \quad (3.47)$$

式(3.44)の二変数一次合同方程式の解となる. 結局, 式(3.9)の二変数一次合同方程式の解の個数は, 次式で与えられる.

$$n^2 \tilde{N} = n \cdot \tilde{N} \times n = 8n \quad (3.48)$$

次に, この部分集合 \mathbb{G}_4 の濃度 (元の個数) を評価する. 部分集合 \mathbb{G}_4 を, 最大公約数 $n=2, 4$ の各々の場合に対応した三つのサブ部分集合に, 次式にて直和分解して評価する.

$$\mathbb{G}_4 = \mathbb{G}_{4-1} \oplus \mathbb{G}_{4-2} \quad (3.49)$$

1) Case #4-1: 最大公約数 $n=2$ の場合, すなわち, 三つのパラメータ (k_1, k_2, k_3) が次式にて定義されたサブ部分集合 \mathbb{G}_{4-1} の要素として指定される場合である.

$$\mathbb{G}_{4-1} := \{(k_1, k_2, k_3) | n \triangleq \text{GCM}(k_1, k_2, k_3, 8) = 2\} \cap \overline{\mathbb{G}_1} \subset \Omega_{(4,4,4)} \quad (3.50)$$

さらに, サブ部分集合 \mathbb{G}_{4-1} を, 以下に示すように, 二つのサブ部分集合に直和分割する.

1-1) Case #4-1-1: Case #1 ではなく, 且つ式(3.40)で定義された整数パラメータ $(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3)$ が $\{\tilde{k}_1, \tilde{k}_2 : \text{even}, \tilde{k}_3 : \text{odd}\}$ の場合である. この場合は, 前記の Case #2 において 8 を 4 に置換した場合に相当する. このことより, 明らかに, この場合に対応したサブ部分集合 \mathbb{G}_{4-1-1} は, 次式にて表現される.

$$\mathbb{G}_{4-1-1} := \overline{\mathbb{G}_1} \cap \mathbb{F}_{4-1-1} = \mathbb{F}_{4-1-1} - \mathbb{E}_{4-1-1} \subset \Omega_{(4,4,4)}, \quad (3.51)$$

$$\mathbb{F}_{4-1-1} := \left\{ (2\tilde{k}_1, 2\tilde{k}_2, 2\tilde{k}_3) \left| \begin{array}{l} \text{mod}(\tilde{k}_1, 2) = \text{mod}(\tilde{k}_2, 2) = 0 \\ \& \text{mod}(\tilde{k}_3, 2) = 1 \end{array} \right. \right\} \subset \Omega_{(4,4,4)},$$

$$\mathbb{E}_{4-1-1} := \{(2\tilde{k}_1, 2\tilde{k}_2, 2\tilde{k}_3) | \tilde{k}_1 = \tilde{k}_2 = 0 \& \text{mod}(\tilde{k}_3, 2) = 1\} \subset \Omega_{(4,4,4)}$$

よって, このサブ部分集合 \mathbb{G}_{4-1-1} の濃度 (元の個数) は, 次式にて評価される.

$$\#\mathbb{G}_{4-1-1} = \#\mathbb{F}_{4-1-1} - \#\mathbb{E}_{4-1-1} = \frac{4^3}{8} - 2 = 6 \quad (3.52)$$

また, 上述したように, この場合は, 前記の Case #2 に相当し, 解は存在しない. よって, 式(3.9)の二変数一次合同方程式の“解の数”は, 0 個である.

1-2) Case #4-1-2: Case #1 及び Case #4-1-1 ではなく, 且つ $(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3, 4)$ が互いに素な場合である. この場合は, 前記の Case #3 において 8 を 4 に置換した場合に相当する. このことより, 明らかに, この場合に対応したサブ部分集合 \mathbb{G}_{4-1-2} は, 次式にて表現される.

$$\mathbb{G}_{4-1-2} := \overline{\mathbb{G}_1} \cap \overline{\mathbb{G}_{4-1-1}} \cap \mathbb{F}_{4-1-2} \quad (3.53)$$

$$= \Omega_{(4,4,4)} - \mathbb{E}_{4-1-2} - \mathbb{F}_{4-1-1} \subset \Omega_{(4,4,4)},$$

$$\mathbb{F}_{4-1-2} := \{(2\tilde{k}_1, 2\tilde{k}_2, 2\tilde{k}_3) | \text{GCM}(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3, 4) = 1\}$$

$$= \Omega_{(4,4,4)} - \mathbb{E}_{4-1-2} \subset \Omega_{(4,4,4)},$$

$$\mathbb{E}_{4-1-2} := \left\{ (2\tilde{k}_1, 2\tilde{k}_2, 2\tilde{k}_3) \left| \begin{array}{l} \text{mod}(\tilde{k}_1, 2) = \text{mod}(\tilde{k}_2, 2) \\ = \text{mod}(\tilde{k}_3, 2) = 0 \end{array} \right. \right\} \subset \Omega_{(4,4,4)},$$

$$\mathbb{F}_{4-1-1} := \left\{ (2\tilde{k}_1, 2\tilde{k}_2, 2\tilde{k}_3) \left| \begin{array}{l} \text{mod}(\tilde{k}_1, 2) = \text{mod}(\tilde{k}_2, 2) = 0 \\ \& \text{mod}(\tilde{k}_3, 2) = 1 \end{array} \right. \right\} \subset \Omega_{(4,4,4)}$$

よって, このサブ部分集合 \mathbb{G}_{4-1-2} の濃度 (元の個数) は, 次式にて評価される.

$$\begin{aligned} \#\mathbb{G}_{4-1-2} &= \#\mathbb{F}_{4-1-2} - \#\mathbb{E}_{4-1-2} - \#\mathbb{F}_{4-1-1} \\ &= 4^3 - \frac{4^3}{8} - \frac{4^3}{8} = 48 \end{aligned} \quad (3.54)$$

また, 上述したように, この場合は, 前記の Case #3 に相当し, 式(3.9)の二変数一次合同方程式の“解の数”は, $2 \times 8 = 16$ 個である.

2) Case #4-2: 最大公約数 $n=4$ の場合, すなわち, 三つのパラメータ (k_1, k_2, k_3) が次式にて定義されたサブ部分集合 \mathbb{G}_{4-2} の要素として指定される場合である.

$$\mathbb{G}_{4-2} := \{(k_1, k_2, k_3) | n \triangleq \text{GCM}(k_1, k_2, k_3, 8) = 4\} \cap \overline{\mathbb{G}_1} \subset \Omega_{(2,2,2)} \quad (3.55)$$

さらに, サブ部分集合 \mathbb{G}_{4-2} を, 以下に示すように, 二つのサブ部分集合に直和分割する.

2-1) Case #4-2-1: Case #1 ではなく, 且つ式(3.40)で定義された整数パラメータ $(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3)$ が $\{\tilde{k}_1, \tilde{k}_2 : \text{even}, \tilde{k}_3 : \text{odd}\}$ の場合である. この場合は, 前記の Case #2 において 8 を 2 に置換した場合に相当する. このことより, 明らかに, この場合に対応したサブ部分集合 \mathbb{G}_{4-2-1} は, 次式にて表現される.

$$\mathbb{G}_{4-2-1} := \overline{\mathbb{G}_1} \cap \mathbb{F}_{4-2-1} = \mathbb{F}_{4-2-1} - \mathbb{E}_{4-2-1} \subset \Omega_{(2,2,2)}, \quad (3.56)$$

$$\mathbb{F}_{4-2-1} := \left\{ (4\tilde{k}_1, 4\tilde{k}_2, 4\tilde{k}_3) \left| \begin{array}{l} \text{mod}(\tilde{k}_1, 2) = \text{mod}(\tilde{k}_2, 2) = 0 \\ \& \text{mod}(\tilde{k}_3, 2) = 1 \end{array} \right. \right\} \subset \Omega_{(2,2,2)},$$

$$\mathbb{E}_{4-2-1} := \{(4\tilde{k}_1, 4\tilde{k}_2, 4\tilde{k}_3) | \tilde{k}_1 = \tilde{k}_2 = 0 \& \text{mod}(\tilde{k}_3, 2) = 1\} \subset \Omega_{(2,2,2)}$$

よって, このサブ部分集合 \mathbb{G}_{4-2-1} の濃度 (元の個数) は, 次式にて評価され, 空集合となる.

$$\#\mathbb{G}_{4-2-1} = \#\mathbb{F}_{4-2-1} - \#\mathbb{E}_{4-2-1} = \frac{2^3}{8} - 1 = 0 \quad (3.57)$$

また, 上述したように, この場合は, 前記の Case #2 に相当し, 解は存在しない. よって, 式(3.9)の二変数一次合同方程式の“解の数”は, 0 個である.

2-2) Case #4-2-2: Case #1 及び Case #4-2-1 ではなく, 且つ $(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3, 2)$ が互いに素な場合である. この場合は, 前記の Case #3 において 8 を 2 に置換した場合に相当する. このことより, 明らかに, この場合に対応したサブ部分集合 \mathbb{G}_{4-2-2} は, 次式にて表現される.

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{4-2-2} &:= \overline{\mathbb{G}_1} \cap \overline{\mathbb{G}_{4-2-1}} \cap \mathbb{F}_{4-2-2} \\ &= \Omega_{(2,2,2)} - \mathbb{E}_{4-2-2} - \mathbb{F}_{4-2-1} \subset \Omega_{(2,2,2)}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\mathbb{F}_{4-2-2} := \{(4\tilde{k}_1, 4\tilde{k}_2, 4\tilde{k}_3) | \text{GCM}(\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3, 2) = 1\}$$

$$= \Omega_{(2,2,2)} - \mathbb{E}_{4-2-2} \subset \Omega_{(2,2,2)},$$

$$\mathbb{E}_{4-2-2} := \left\{ (4\tilde{k}_1, 4\tilde{k}_2, 4\tilde{k}_3) \left| \begin{array}{l} \text{mod}(\tilde{k}_1, 2) = \text{mod}(\tilde{k}_2, 2) \\ = \text{mod}(\tilde{k}_3, 2) = 0 \end{array} \right. \right\} \subset \Omega_{(2,2,2)},$$

$$\mathbb{F}_{4-2-1} := \left\{ (4\tilde{k}_1, 4\tilde{k}_2, 4\tilde{k}_3) \left| \begin{array}{l} \text{mod}(\tilde{k}_1, 2) = \text{mod}(\tilde{k}_2, 2) = 0 \\ \& \text{mod}(\tilde{k}_3, 2) = 1 \end{array} \right. \right\} \subset \Omega_{(2,2,2)}$$

よって, このサブ部分集合 \mathbb{G}_{4-2-2} の濃度 (元の個数) は, 次式にて評価される.

$$\begin{aligned} \#[\mathbb{G}_{4-2-2}] &= \#[\mathbb{Q}_{(4,4,4)}] - \#[\mathbb{E}_{4-2-2}] - \#[\mathbb{F}_{4-2-1}] \\ &= 2^3 - \frac{2^3}{8} - \frac{2^3}{8} = 6 \end{aligned} \quad (3.59)$$

また、上述したように、この場合は、前記の Case #3 に相当し、式(3.9)の二変数一次合同方程式の“解の数”は、 $4 \times 8 = 32$ 個である。

【 求解と解の個数終 】

式(3.9)の二変数一次合同方程式の整数解の個数の解析の結果、及びこの結果から導かれる疎性に関する性質を以下に要約して示す。

- 1) 整数解の個数 $N_{Z; k_1, k_2, k_3}$ は、角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) の値に応じて異なり、 $\{0, 8, 16, 32, 64\}$ のいずれかである。
- 2) 整数解の個数 $N_{Z; k_1, k_2, k_3}$ が $\{0, 8, 16, 32, 64\}$ の各々の場合において、該当する角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) の組み合わせ数は、それぞれ $\{73, 384, 48, 6, 1\}$ である。
- 3) 角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) の三次元 DFT 係数の疎性度 $S_{p; k_1, k_2, k_3}$ を次式にて定義し、評価する。

$$S_{p; k_1, k_2, k_3} = 1 - \frac{N_{Z; k_1, k_2, k_3}}{256} \quad (3.60)$$

角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) の三次元 DFT 係数の疎性度 $S_{p; k_1, k_2, k_3}$ を小さいものから順に順位の関数として表現すると、図 1 に示す階段型増加関数となる。図 1 に示すように、約 89.25% の三次元 DFT 係数が 0.875 以上の高い疎性度 $S_{p; k_1, k_2, k_3}$ を有している。

- 4) “整数解の個数 $N_{Z; k_1, k_2, k_3}$ が 64, 32, 16 と大きな値となる”三次元 DFT 係数の角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) の部分集合 $\mathbb{G}^{<256>}, \mathbb{G}^{<128>}, \mathbb{G}^{<64>}$ の元を表 1 に示した。表 1 では、 $(k_1, k_2, k_3) = (4, 4, 4)$ では、整数解の個数 $N_{Z; k_1, k_2, k_3}$ は 32 であり、疎性度 $S_{p; k_1, k_2, k_3}$ は 0.5 ($= 1 - 32/64$) と小さな値である。一方、 $(k_1, k_2, k_3) = (4, 4, 3), (4, 4, 5)$ では、整数解の個数 $N_{Z; k_1, k_2, k_3}$ は 0 であり、疎性度 $S_{p; k_1, k_2, k_3}$ は 1.0 である。このように、角周波数インデックスが互いに隣接した三次元 DFT 係数間でも、疎性度は大きく異なる。
- 5) 整数解の個数 $N_{Z; k_1, k_2, k_3}$ が 0 となる角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) の部分集合 $\mathbb{G}^{<0>}$ は、次式の直和分解にて表現される。

$$\mathbb{G}^{(0)} = \mathbb{G}_{1-2} \oplus \mathbb{G}_2 \oplus \mathbb{G}_{4-1-1} \oplus \mathbb{G}_{4-2-1} \quad (3.61)$$

- 6) 巡回シフト型平行移動の動きベクトル \vec{v} が一様分布に従って確率的に生起するものと仮定すると、三次元 DFT の“非零の係数値が生起する確率 P_{NZ} ”は、次式に示すように 1/8 と評価される。

$$P_{NZ} := E[\text{Prob}\{\hat{F}_{k_1, k_2, k_3}^{(m_1, m_2)} \neq 0\}] = \frac{1}{512} \sum_{k_1=1}^8 \sum_{k_2=1}^8 \sum_{k_3=1}^8 \frac{N_{Z; k_1, k_2, k_3}}{64} = \frac{1}{8} \quad (3.62)$$

3.1.3 三次元 DFT 係数の疎性度の角周波数毎の評価：解析サブブロックのサイズパラメータ N が素数の場合

解析サブブロックのサイズパラメータ N が素数の場合、前節 3.1.2 で述べた Case #1-1, Case #1-2, Case #3 に相当した三通りの場合のみが発生する。Case #1-1 の場合、式(3.9)の二変数一次合同方程式の解の個数は N^2 個である。一方、Case #1-1 の場合、解は存在しない。また、角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) が Case #1-1, Case #1-2 以外の場合は、全て Case #3 の場合に相当し、解の個数は N 個である。この

ように、サイズパラメータ N を素数に設定すると、Case #1-1, Case #1-2 の場合以外には、角周波数成分による疎性度の偏りは生じない。

3.2 時間軸方向に短いサイズの三次元 DFT の場合

ここでは、三次元 DFT の解析サブブロックのサイズ $(N \times N \times M)$ において、次式の関係が成立する場合、すなわち時間軸方向に短いサイズの場合について検討する。

$$N = L \times M > M, \quad L \geq 2 \quad (3.63)$$

このとき、巡回シフト型平行移動生成モデルによってデジタル静止画像 s_{n_1, n_2} から生成されたデジタル動画像 $\hat{f}_{n_1, n_2, n_3}^{(m_1, m_2)}$ の三次元 DFT 係数 $\hat{F}_{k_1, k_2, k_3}^{(m_1, m_2)}$ は、デジタル静止画像 s_{n_1, n_2} の二次元 DFT 係数 S_{k_1, k_2} を用いて次式にて表現される。

$$\hat{F}_{k_1, k_2, k_3}^{(m_1, m_2)} = \begin{cases} 0, & \text{mod}(m_1 k_1 + m_2 k_2 + L k_3, N) \neq 0 \\ & \& \text{mod}(m_1 k_1 + m_2 k_2, L) = 0 \\ Z_{k_1, k_2, k_3}^{(m_1, m_2)} \cdot S_{k_1, k_2}, & \text{mod}(m_1 k_1 + m_2 k_2 + L k_3, N) \neq 0 \\ & \& \text{mod}(m_1 k_1 + m_2 k_2, L) \neq 0 \\ M \cdot S_{k_1, k_2}, & \text{mod}(m_1 k_1 + m_2 k_2 + L k_3, N) = 0 \end{cases} \quad (3.64)$$

$$Z_{k_1, k_2, k_3}^{(m_1, m_2)} := \frac{1 - W_N^{-\text{mod}(m_1 k_1 + m_2 k_2, L) \cdot M}}{1 - W_N^{-\text{mod}(m_1 k_1 + m_2 k_2 + L k_3, N)}}, \quad W_N := \exp\left(-j \frac{2\pi}{N}\right)$$

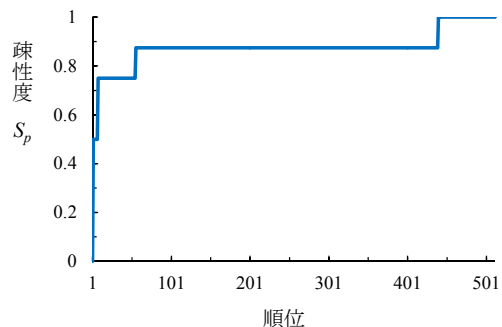


図 1 三次元 DFT 係数の疎性度 $S_{p; k_1, k_2, k_3}$ の順序統計

表 1 (k_1, k_2, k_3) の部分集合 $\mathbb{G}^{<64>}, \mathbb{G}^{<32>}, \mathbb{G}^{<16>}$ の元

$\mathbb{G}^{<64>}$			$\mathbb{G}^{<32>}$			$\mathbb{G}^{<16>}$								
k_1	k_2	k_3	k_1	k_2	k_3	k_1	k_2	k_3	k_1	k_2	k_3	k_1	k_2	k_3
0	0	0	4	0	0	0	2	0	2	4	0	6	0	0
			0	4	0	0	2	2	2	4	2	6	0	2
			4	4	0	0	2	4	2	4	4	6	0	4
			4	0	4	0	2	6	2	4	6	6	0	6
			0	4	4	0	6	0	2	6	0	6	2	0
			4	4	4	0	6	2	2	6	2	6	2	2
						0	6	4	2	6	4	6	2	4
						0	6	6	2	6	6	6	2	6
						2	0	0	4	2	0	6	4	0
						2	0	2	4	2	2	6	4	2
						2	0	4	4	2	4	6	4	4
						2	0	6	4	2	6	6	4	6
						2	2	0	4	6	0	6	6	0
						2	2	2	4	6	2	6	6	2
						2	2	4	4	6	4	6	6	4
						2	2	6	4	6	6	6	6	6

以下では、とくに、三次元 DFT の解析サブブロックのサイズ ($N \times N \times M$) において、次式の関係が成立する場合を取り上げる。

$$N = 2M, \quad L = N/M = 2 \quad (3.65)$$

式(3.64)に示したように三次元 DFT 係数 $\hat{F}_{k_1, k_2, k_3}^{(m_1, m_2)}$ は、その角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) が以下の二つの場合に該当するときのみに非零の値を有する。

- ① Case #A : $\text{mod}(m_1 k_1 + m_2 k_2 + 2k_3, N) = 0$ の場合
- ② Case #B : $\text{mod}(m_1 k_1 + m_2 k_2 + 2k_3, N) \neq 0$ & $\text{mod}(m_1 k_1 + m_2 k_2, 2) \neq 0$ の場合

Case #A では、三次元 DFT 係数 $\hat{F}_{k_1, k_2, k_3}^{(m_1, m_2)}$ の非零条件は、次式に示すように書き直せる。

$$2k_3 = l \times N - (m_1 k_1 + m_2 k_2); \quad \exists l: \text{Integer}, \quad (3.66)$$

$$0 \leq k_1 \leq N-1, \quad 0 \leq k_2 \leq N-1, \quad 0 \leq k_3 \leq M-1$$

N は偶数なので、上式の関係より明らかに、式中の因子 $(m_1 k_1 + m_2 k_2)$ が奇数の場合には、 k_3 の解は存在し得ない。一方、式中の因子 $(m_1 k_1 + m_2 k_2)$ が偶数の場合には、 k_3 の解は、次式にて与えられる。

$$k_3 = \frac{1}{2} \cdot \text{mod}(N - m_1 k_1 - m_2 k_2, N) \quad (3.67)$$

また、動きベクトル $\vec{v} = (m_1, m_2)^T$ が指定されたとき、因子 $(m_1 k_1 + m_2 k_2)$ の偶奇は、二つの空間角周波数インデックス (k_1, k_2) の偶奇の組み合わせに応じて決定される。このことから、“非零の三次元 DFT 係数”の角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) の組み合わせ数が、表 2 に示したように、動きベクトル $\vec{v} = (m_1, m_2)^T$ の二つの要素の偶奇に応じて定まる。

表 2 Case #A での“非零の三次元 DFT 係数”の角周波数インデックスの組み合わせ数

		m_1	
		偶数	奇数
m_2	偶数	N^2 通り	$N^2/2$ 通り
	奇数	$N^2/2$ 通り	$N^2/2$ 通り

一方、Case #B の非零条件は、 $N = 2M$ と設定した場合に、簡素化され、次式の単一の非零条件に帰着する。

$$\text{mod}(m_1 k_1 + m_2 k_2, 2) \neq 0 \quad (3.68)$$

式(3.68)の非零条件を満足する空間角周波数インデックス (k_1, k_2) の組み合わせ数は、動きベクトル $\vec{v} = (m_1, m_2)^T$ の二つの要素の偶奇に応じて定まる。時間角周波数インデックス k_3 には、 $0 \leq k_3 \leq M-1$ の存在範囲の制約の他には何ら制約がないので、“非零の三次元 DFT 係数”の角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) の組み合わせ数は、表 3 に示したように、動きベクトル $\vec{v} = (m_1, m_2)^T$ の二つの要素の偶奇に応じて定まる。

表 3 Case #B での“非零の三次元 DFT 係数”の角周波数インデックスの組み合わせ数

		m_1	
		偶数	奇数
m_2	偶数	なし	$M \times N^2/2$ 通り
	奇数	$M \times N^2/2$ 通り	$M \times N^2/2$ 通り

$N = 2M$ と設定した場合には、Case #A と Case #B は、互いに排反事象となるので、単純な巡回シフト型平行移動生

成モデルに基づいて定義されたデジタル動画の三次元 DFT 係数が、式(3.64)において非零条件を満足する角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) の組み合わせ総数は、表 2 と表 3 の組み合わせ数の単純な和として与えられ、次式にて表現される。

$$\#_{(k_1, k_2, k_3)} \{ \hat{F}_{k_1, k_2, k_3}^{(m_1, m_2)} \neq 0 \} = \begin{cases} N^2, & m_1, m_2: \text{even} \\ (M+1) \frac{N^2}{2}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.69)$$

ここで、 $M \geq 2$ であるので、非零条件を満足する角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) の組み合わせ総数は、DFT 係数の総数 $M \times N^2$ よりもつねに小さくなり、三次元 DFT 係数の疎性度 $S_p^{(m_1, m_2)}$ は、次式にて与えられる。

$$S_p^{(m_1, m_2)} := 1 - \frac{\#_{(k_1, k_2, k_3)} \{ \hat{F}_{k_1, k_2, k_3}^{(m_1, m_2)} \neq 0 \}}{M \times N^2} = \begin{cases} \frac{M-1}{M}, & m_1, m_2: \text{even} \\ \frac{M-1}{2M}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.70)$$

また、三次元 DFT 係数の非零の有意な係数値の生起確率 P_{NZ} は、平均的には、次式に示すように近似評価される。

$$P_{NZ} := E \left[\text{Prob} \{ \hat{F}_{k_1, k_2, k_3}^{(m_1, m_2)} \neq 0 \} \right] = \frac{1}{N^2} \sum_{(m_1, m_2) \in [0, N-1]^2} \#_{(k_1, k_2, k_3)} \{ \hat{F}_{k_1, k_2, k_3}^{(m_1, m_2)} \neq 0 \} = \frac{M \times N^2}{M \times N^2} = \frac{1}{M} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{M+1}{2} \right) = \frac{3M+5}{8M} \quad (3.71)$$

上式の解析結果は、 $N = 2M$ と設定すると、 $N = M$ と設定した場合（立方体の解析サブブロックの場合）に比較し、疎性の程度が顕著に低下することを意味している。よって、三次元 DFT の動画復元への応用の観点からは、三次元 DFT のサイズを $N \times N \times N$ と設定する方が有利である。

3.3 時間軸方向に長いサイズの三次元 DFT の場合

ここでは、三次元 DFT の解析サブブロックのサイズ ($N \times N \times M$) において、次式の関係が成立する場合、すなわち時間軸方向に長いサイズの場合について検討する。

$$M = L \times N > N, \quad L \geq 2 \quad (3.72)$$

このとき、巡回シフト型平行移動生成モデルによってデジタル静止画像 s_{n_1, n_2} から生成されたデジタル動画像 $\hat{f}_{n_1, n_2, n_3}^{(m_1, m_2)}$ の三次元 DFT 係数 $\hat{F}_{k_1, k_2, k_3}^{(m_1, m_2)}$ は、デジタル静止画像 s_{n_1, n_2} の二次元 DFT 係数 S_{k_1, k_2} を用いて次式にて表現される。

$$\hat{F}_{k_1, k_2, k_3}^{(m_1, m_2)} = \begin{cases} 0, & \text{mod}(L(m_1 k_1 + m_2 k_2) + k_3, M) \neq 0 \\ M \cdot S_{k_1, k_2}, & \text{mod}(L(m_1 k_1 + m_2 k_2) + k_3, M) = 0 \end{cases} \quad (3.73)$$

上式における三次元 DFT 係数の非零条件より明らかに、非零の三次元 DFT 係数の時間角周波数インデックス k_3 は、次式にて与えられる。

$$k_3 = l \cdot M - L(m_1 k_1 + m_2 k_2); \quad \exists l: \text{Integer}, \quad (3.74)$$

$$0 \leq k_1 \leq N-1, \quad 0 \leq k_2 \leq N-1, \quad 0 \leq k_3 \leq M-1$$

ここで、二つの空間角周波数インデックス k_1, k_2 は、自由

パラメータであるので、式(3.73)の非零条件を満足する角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) の組み合わせ総数は、 N^2 であり、DFT 係数の総数 $M \times N^2$ よりもつねに小さい。すなわち、次式が成立する。

$$\#_{(k_1, k_2, k_3)} \left\{ \widehat{F}_{k_1, k_2, k_3}^{(m_1, m_2)} \neq 0 \right\} = N^2 \quad (3.75)$$

また、三次元 DFT 係数の疎性度 $S_p^{(m_1, m_2)}$ は、次式に示すように $1-1/M$ に等しい。

$$S_p^{(m_1, m_2)} := 1 - \frac{\#_{(k_1, k_2, k_3)} \left\{ \widehat{F}_{k_1, k_2, k_3}^{(m_1, m_2)} \neq 0 \right\}}{M \times N^2} = 1 - \frac{1}{M} \quad (3.76)$$

また、三次元 DFT 係数の非零の有意な係数値の生起確率 P_{NZ} は、平均的には、 $P_{NZ} \approx 1/M$ と近似評価される。

これらの解析によれば、『 $M=L \times N$ と設定すると、 $M=N$ と設定した場合と同様に、非零の係数値が生起する確率 P_{NZ} は、フレーム数 M に反比例して減少する』とされている。しかしながら、三次元 DFT の動画像復元への実際の応用では、フレーム数 M を N よりも大きくすることが、必ずしも復元性能の向上に寄与する訳ではない。

4. 動画像の三次元 DFT 係数の疎性の統計的評価

筆者らが先に提案した二次元 2-C S^2GM 分布モデルに基づく統計的モデリング [6] ~ [8] を、実動画像の複素数の三次元交流 DFT 係数に適用し、その三次元 DFT 係数の疎性を定量的に評価する。なお、複素数の交流 DFT 係数を二次元の確率変数ベクトルとして取り扱っている。また、以下に述べる統計的モデリングは、雑音に汚されていない原動画像を対象としたものであり、二次元 2-C S^2GM 分布モデルにおいて“雑音による劣化”を考慮する必要はない。

4.1 二次元二成分混合型球対称ガウス分布モデル

疎性を有した二次元信号 \bar{x} の確率分布 $p_x(\bar{x})$ を、有意性の低い信号に対応した比較的小きな分散 σ_0^2 の二次元球対称ガウス分布 $g_2(\bar{x}; \bar{0}, \sigma_0^2)$ と、有意性の高い信号に対応した比較的大きな分散 σ_1^2 の二次元球対称ガウス分布 $g_2(\bar{x}; \bar{0}, \sigma_1^2)$ を $P_0 : P_1$ の混合比で確率的に混合した確率密度関数として、次式にて定義する。

$$p_x(\bar{x}) := P_0 \times g_2(\bar{x}; \bar{0}, \sigma_0^2) + P_1 \times g_2(\bar{x}; \bar{0}, \sigma_1^2); \quad (4.1)$$

$$0 < P_0 < 1, 0 < P_1 < 1, P_0 + P_1 = 1, 0 < \sigma_0^2 < \sigma_1^2$$

ここで、“混合型の確率分布が単一の二次元球対称ガウス分布に縮退する”という特異な場合を排除するように、そのモデルパラメータ $P_0, P_1, \sigma_0, \sigma_1$ の許容範囲を限定している。以下では、この確率密度関数を有する確率分布を、二次元二成分混合型球対称ガウス分布 (二次元 2-C S^2GM 分布) と呼び、次式にて簡潔に表記する。

$$\mathcal{GM}_2(\bar{0}; \sigma_0^2, \sigma_1^2; P_0, P_1) \quad (4.2)$$

なお、二次元 2-C S^2GM モデルは、三つの独立なモデルパラメータ $P_1, \sigma_0^2, \sigma_1^2$ をもつ。

モデル化対象の各動画像シーケンスの複素数の三次元交流 DFT 係数のサンプル系列から求めた“その大きさの 1 次, 2 次, 4 次モーメントのサンプル推定値”を、各々 $a_R, \sigma_R^2, \mu_{R,4}$ とする。このとき、同一の統計量を与える二次元 2-C S^2GM 分布モデルの三つのモデルパラメータ $P_1, \sigma_0^2, \sigma_1^2$ を求めることを通し、複素数の三次元交流 DFT 係数の統計的モデリングが行われる。二次元 2-C S^2GM 分布モデルのモデルパラメータの推定法の詳細については、筆者らの文

献 [6] ~ [8] を参照されたい。

統計的モデリングによって一意に求められた二次元 2-C S^2GM 分布モデル $\mathcal{GM}_2(\bar{0}; \sigma_0^2, \sigma_1^2; P_0, P_1)$ の確率密度関数の形を評価するため、二次元信号 \bar{x} の大きさの 2 次モーメントが次元数 2 と一致するように二次元 2-C S^2GM 分布モデルを規格化する。この規格化二次元 2-C S^2GM 分布モデルは、次式にて与えられる。

$$\widetilde{\mathcal{GM}}_2(\mathbf{0}; S, T; P_0, P_1); \quad (4.3)$$

$$S = \frac{\sigma_0^2}{P_0 \sigma_0^2 + P_1 \sigma_1^2}, T = \frac{\sigma_1^2}{P_0 \sigma_0^2 + P_1 \sigma_1^2},$$

$$P_0 \cdot S + P_1 \cdot T = 1 \quad \& \quad P_0 + P_1 = 1,$$

$$0 < S < 1, T > 1, 0 < P_0 < 1, 0 < P_1 < 1.$$

なお、独立なモデルパラメータは、 P_0, S の二つのみである。

4.2 動画像シーケンスの複素数の三次元交流 DFT 係数への二次元 2-C S^2GM 分布モデルの当て嵌め

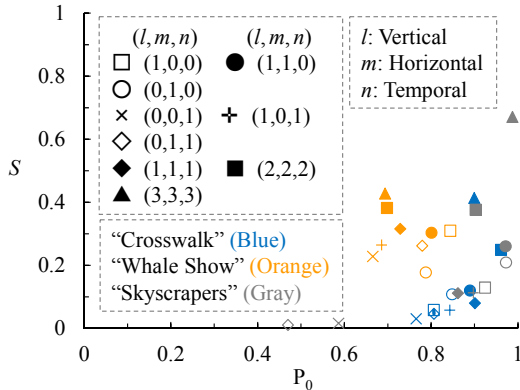
本節では、モノクローム動画像の複素数の三次元交流 DFT 係数の統計的モデリングに、上述の二次元 2-C S^2GM 分布モデルを当て嵌めた。すなわち、角周波数インデックス (k_1, k_2, k_3) で指定された複素数の三次元交流 DFT 係数毎に、複素数の三次元交流 DFT 係数の大きさのモーメントのサンプル推定値を求め、これに筆者らが先に提案したモデルパラメータ推定法 [6] ~ [8] を適用し、二次元 2-C S^2GM 分布モデルを当て嵌めた。

図 2 には、種々の角周波数インデックス (l, m, n) について、“各動画像シーケンスの複素数の三次元交流 DFT 係数に当て嵌められた規格化二次元 2-C S^2GM 分布”の二つの独立なモデルパラメータ P_0, S を二次元座標としてプロットした。これにより、複素数の三次元交流 DFT 係数の疎性を視覚的に把握できる。図 2 は、三次元 DFT の解析サブブロックのサイズを $8 \times 8 \times 8$ とし、六種類の ITE 標準モノクローム動画像シーケンスを対象とした結果である。なお、表 4 には、これら六種類の ITE 標準モノクローム動画像シーケンスの画像内容を要約して示した。また、図 3 には、角周波数インデックス $(l, m, n) = (0, 0, 1), (1, 1, 1)$ の各々の三次元 DFT 係数に当て嵌められた規格化二次元 2-C S^2GM 分布の RDF (Radial Density Function: DFT 係数の大きさ r の確率密度関数) $P_R(r)$ を、二次元球対称ガウス分布の RDF (レイリー分布) と比較して示した。

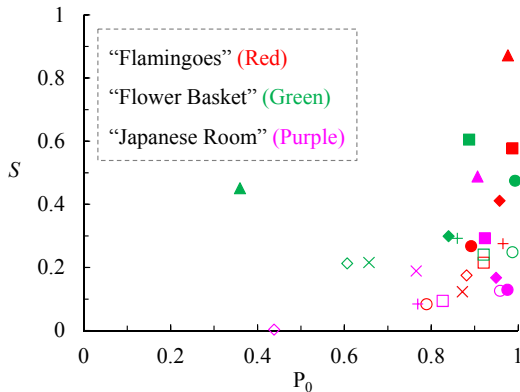
図 2 の結果より、多くの複素数の三次元交流 DFT 係数が非常に裾野の長い確率分布に従っていることが確認される。また、図 2 では、複素数の三次元交流 DFT 係数に対して求められたモデルパラメータは、その多くが $(P_0, S) = (1, 0)$ 付近に偏在しており、このことは非常に疎性の強い確率分布としてモデル化されていることを意味している。

表 4 六種類 ITE 標準動画像シーケンスの画像内容

Sequence Title	Object Motion	Camera Work
Crosswalk	A lot of walking people	Fixed long shot
Whale Show	Jumping whale	Panning
Skyscrapers	Still objects, an urban view	Panning
Flamingoes	A moving herd of flamingoes	Panning
Flower Basket	Still objects	Slow panning
Japanese Room	Walking woman	Panning

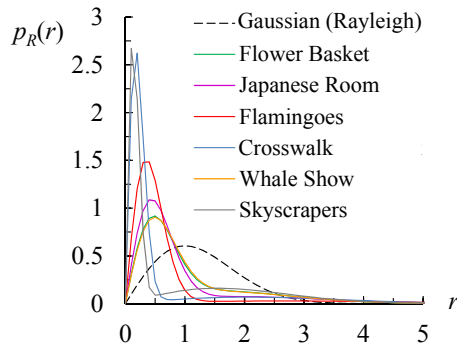


(a) “Crosswalk”, “Whale Show”, “Skyscrapers”

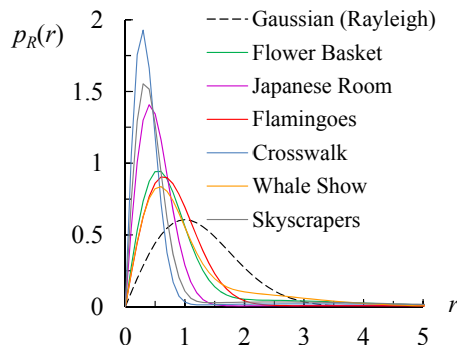


(b) “Flamingoes”, “Flower Basket”, “Japanese Room”

図2 角周波数インデックス (l, m, n) の三次元交流 DFT 係数に当て嵌められた“規格化二次元 2-C S^2GM 分布”のモデルパラメータ P_0, S の散布図



(a) 角周波数インデックス $(0, 0, 1)$



(b) 角周波数インデックス $(1, 1, 1)$

図3 三次元 DFT 係数に当て嵌められた規格化二次元 2-C S^2GM 分布の RDF $P_R(r)$

図3において、 $(0, 0, 1)$ と $(1, 1, 1)$ の各々の角周波数インデックスの三次元 DFT 係数に当て嵌められた規格化二次元 2-C S^2GM 分布の RDF は、単一の二次元球対称分布の RDF であるレイリー分布に比較して、より 0 付近に分布が集中し、且つ裾野の長い分布となっており、裾野の広がり程度は画像内容に応じて相当に異なる。とくに、低い角周波数インデックスで、これらの傾向が顕著である。

5. むすび

動画の“動き”を三次元 DFT に適合するように“整数値の巡回シフト型の平行移動”に限定した“デジタル動画の動き生成モデル”を想定した理論解析を行い、デジタル動画の三次元 DFT 係数が有する疎性を角周波数インデックス毎に分析した。大抵の場合、三次元解析サブブロックのサイズは 2 のべき乗に設定されているが、理論解析によって、『このサイズ設定では、三次元 DFT 係数の疎性の程度は、その角周波数インデックスに応じて大きく異なる』ことが示された。また、三次元 DFT の三次元解析サブブロックのサイズが三次元 DFT 係数の平均的な疎性に与える影響について理論解析を行い、立方体形状の解析サブブロックの定義が適していること、及び解析サブブロックのサイズを素数と設定することで、三次元 DFT 係数は角周波数インデックスによらずにほぼ均一な疎性を有することが示された。さらに、自然動画の三次元 DFT 係数の確率分布に二成分混合型球対称ガウス分布モデルを当て嵌め、自然動画の三次元 DFT 係数が有する疎性を統計的に評価し、理論解析の結果と矛盾しない統計的な評価結果が得られることを確認した。

参考文献

- [1] 小松 隆, 張 鍵, 齊藤 隆弘, “平均値分離型三次元 ST-DFT を用いた動画復元法,” 電子情報通信学会論文誌, Vol.J100-D, No.9, pp.842-845 (2017).
- [2] T. Komatsu, K. Tyon, T. Saito, “3-D mean separation-type short-time DFT with its application to moving-image denoising,” Proc. IEEE ICIP 2017, pp.2961-2965, Beijing, China (2017).
- [3] K. Dabov, A. Foi, K. Egiazarian, “Image restoration by sparse 3D transform-domain collaborative filtering,” IEEE Trans. Image Process., Vol.16, No.8, pp.2080-2095 (2007).
- [4] K. Dabov, A. Foi, K. Egiazarian, “Video denoising by sparse 3D transform-domain collaborative filtering,” Proc. 15th European Signal Process. Conf. (EUSIPCO 2007), pp.145-149, Poznań, Poland (2007).
- [5] M. Maggioni, G. Boracchi, A. Foi, K. Egiazarian, “Video denoising, deblocking and enhancement through separable 4-D nonlocal spatiotemporal transforms,” IEEE Trans. Image Process., Vol.21, No.9, pp.3952-3966 (2012).
- [6] T. Komatsu, T. Saito, “Statistical modeling for 3-D DFT coefficients of moving-image sequence and its application to denoising,” 2018 IEEE Int. Conf. on Image Processing (ICIP 2018), Athens, Greece, in press (2018).
- [7] 齊藤 隆弘, 小松 隆, “劣化画像復元のための DFT 係数の確率分布モデル: 多次元混合型球対称ガウス分布モデルとそのパラメータ推定,” 第 16 回情報科学技術フォーラム(FIT2017), I-001 (2017).
- [8] 齊藤 隆弘, 小松 隆, “ランダム信号の DFT 係数のための多次元二成分混合型球対称ガウス分布モデルとそのパラメータ推定,” 電子情報通信学会論文誌, Vol.J101-D, No.9, 印刷中 (2018).
- [9] 齊藤 隆弘, 小松 隆, “[招待講演] 動画の 3-D DFT 係数の統計的モデリングとその動画復元への応用,” 電子情報通信学会・画像工学研究会, IE2018-6 (2018).
- [10] J. S. Lim, “Image restoration by short space spectral subtraction,” IEEE Trans. ASSP, Vol.28, No.2, pp.191-197 (1980).