A-019

15 点からなる完全グラフのオイラー回路の最短部分閉路長に関する計算機実験

Computer experiments on the length of a shortest subcycle of an Eulerian circuit of the complete graph with fifteen vertices

神保 秀司†
Shuji JIMBO

1　はじめに

オイラーグラフ G のオイラー回路すべてからなる集合を $\mathcal{E}(G)$ で表す．$C \in \mathcal{E}(G)$ の最短部分閉路長を $l(C)$ とおいたとき

$$\max_{C \in \mathcal{E}(G)} l(C)$$

を G のオイラー回帰長と呼び，$e(G)$ で表し，特に，奇数 n 個の点からなる完全グラフ K_n のオイラー回帰長を $e(n)$ で表す．著者らは，この数の決定を目標とし，現在 $n \geqq 15$ について $n-4 \leqq e(n) \leqq n-3$ が成り立つことを示している [1]．一方，$n \leqq 13$ のとき $e(n)$ の正確な値が得られており，$7 \leqq n \leqq 13$ のとき $e(n) = n-3$ が成り立つことが計算機実験により判明している．さらに，$n \geqq 7$ のとき，最短部分閉路長が $n-4$ である K_n のオイラー回路の構成アルゴリズムが知られている．

$n \geqq 15$ のときに $e(n) < n-2$ が成り立つことの証明は，次の命題が成り立つことを応用して得られている．

命題 1 n が 7 以上の奇数のとき，最短部分閉路長が $n-2$ であるオイラー回路 C が存在するなら，K_n の任意の点 v について v が丁度 1 回しか出現しない C の部分回路で長さが $n+3$ よりも長いものは存在しない．

一方，最短部分閉路長が 12 である K_{15} の部分回路で特定の点が丁度 1 回しか出現しないにも拘わらず長さが 30 以上のものが構成できてしまう．この事実から $n \geqq 7$ のとき $e(n) < n-2$ が成り立つことの証明手法を $e(15) < 12$ を導くために応用するのは困難であることが判る．

現在，著者らは，次の予想を立てている．

予想 1 n が 15 以上の奇数なら，$e(n) = n-4$ が成り立つ．

† 岡山大学大学院自然科学研究科
Graduate School of Natural Science and Technology, Okayama University

完全グラフ K_n の小道 T についての条件 $P_{C-3}(T)$ を次のように定義し，$P_{C-3}(T)$ を満たす小道 T を P_{C-3} 小道と呼ぶ．

> 条件 $P_{C-3}(T)$: T は，特定の点が丁度 1 回しか出現しない K_n の部分閉路で長さが $n-3$ より短かいものを含まない．

例えば，15 よりも大きい奇数 n について，$P_{C-3}(C)$ を満たす K_n のオイラー回路 C の存在を仮定して $P_{C-3}(C')$ を満たす K_{n-2} のオイラー回路 C' の存在を導く論法が案出でき，かつ，K_{15} の P_{C-3} オイラー回路が存在しないことの検証に成功すれば，予想 1 の成立が導かれる．

次節では，K_{15} のオイラー回帰長決定のための計算機実験の効率化のために実施した計算機実験について述べる．この実験では，十分に長い K_{15} の P_{C-3} 小道をランダムに多数生成し，探索空間の規模を推定すること，及び，それらの小道の反転数の計測を試みた．なお，生成した小道上の 15 個の点の出現回数 2 から 6 までの並びについて 2 個の点の組合せ 105 個のうち出現回数 1 の初回の並びと順序が反転しているものの個数を反転数と呼ぶ．さらに，最後の節では，今後の課題などについて述べる．

2　計算機実験

本論文では，単純グラフの歩道 W を点の列とみなし，その長さ $|W|$ を W に含まれる点の個数で定義する．さらに，グラフの点集合を 0 から始まる連続した非負整数の集合とする．計算機実験でランダムに生成する K_{15} の P_{C-3} 小道 T の長さの最大値として，$|T| = 93$ を採用した．このような T では，すべての点が 6 回以上出現しなくてはならない．

反転数の計測の実験における小道生成の初期配置として，式 (1) を採用した．この初期配置から延長した長さ 35 までの P_{C-3} 小道すべてを過去の実験で生成していた

からである．

$$(0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 0,\ 12) \qquad (1)$$

使用した初期配置は，924 個存在する長さが 20 の P_{C-3} 小道すべてである．K_{15} の P_{C-3} オイラー回路は，次の式 (2) の形の部分小道も含まなくてはならない．

$$(0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 1,\ 13) \qquad (2)$$

式 (2) の方が式 (1) よりも長さが 1 大きいので探索の初期配置として有利である．探索空間の規模の推定についての実験では，初期配置として式 (2) を採用した．

2.1 探索空間の規模の推定についての実験

式 (2) の初期配置から始めて P_{C-3} 小道を延長する形で K_{15} の P_{C-3} オイラー回路の存在を検証する実験における探索空間の規模を知るために，小道を延長するときの長さ毎の分枝数の平均値 (平均分枝数) を推定した．式 (2) の初期配置から条件 $P_{C-3}(T)$ を満たす小道 T を一様乱数に基づいて延長可能なまで延長を続けた．生成した小道の総数は，2^{32} であり，それらの小道の平均長は，約 47.8 であった．$|T| = 15$ から $|T| = 90$ までの平均分枝数を表 1 に示す．興味深い点は，平均分枝数が単調に減少していないことである．

表 1: 平均分枝数

長さ	平均分枝数	長さ	平均分枝数
15	4.000	55	1.588
20	2.768	60	1.627
25	3.037	65	1.399
30	2.681	70	1.151
35	2.165	75	0.862
40	2.444	80	0.644
45	2.270	85	0.660
50	1.839	90	0.493

式 (1) の初期配置から延長して得られる長さ 35 の P_{C-3} 小道の総数が $N_1(35) = 2,323,724,216$ であることが計算機実験で得られている．式 (2) の初期配置から延長した場合，長さ 36 の P_{C-3} 小道の総数がこの値に近いと考えられる．1 より大きい $|T| = 36$ から $|T| = 70$ までのすべての平均分枝数と $N_1(35)$ の積は，約 $1.240 \cdot 10^{18} \sim 2^{60.105}$ であり，これが，探索空間の規模の目安になると考える．従って，現時点で一般的に利用可能な計算機環境では探索を成功させることは，極めて困難であると予想される．

2.2 反転数の計測についての実験

K_{15} の長さ 93 の P_{C-3} 小道を多数生成し，2 回目から 6 回目までの 6 回の点の出現回数について 1 回目の出現に対する反転数の最大値，最小値，平均値を計測した．その結果を表 2 に挙げる．生成した長さ 93 の P_{C-3} 小道の総数は，$4,338,379$ であった．それらの小道は，すべて一意に延長を続けることができ，すべてオイラー回路にまで延長することはできなかったが，最長のものの長さは，102 であった．

表 2: 反転数

回目	最大反転数	最小反転数	平均反転数
2	25	4	13.722
3	46	3	21.320
4	61	5	27.909
5	72	6	34.249
6	85	8	40.422

出現回数が大きいとき最小反転数がかなり大きい値になることを期待していた．しかしながら，表 2 から判るように反転数の平均値は，点の出現回数の増加に伴なって増加しているが最小反転数はすべて 10 以下であり，探索空間の縮小につながる反転数についての特徴は，この実験からは，得られなかった．

3 おわりに

式 (2) から始めて P_{C-3} 小道 T を延長していくとき，T の最初と最後の点 12 個ずつ合計 24 個を除いた点の並び方はその後の P_{C-3} 小道の延長可能性に影響しない．例えば，長さ $|T| = 40$ のすべての P_{C-3} 小道 T について，T を最後の 12 個の点の並び $l_{12}(T)$ と辺集合 $E(T)$ の組 $(l_{12}(T), E(T))$ で表したとき探索空間がどの程度減少するか計算機実験により検証したい．

本研究は JSPS 科研費 JP15K00018 の助成を受けたものです．本研究は主に九州大学情報基盤研究開発センターの研究用計算機システムを利用しました．

参考文献

[1] Shuji Jimbo. Improvement of the upper bound on the eulerian recurrent lengths of complete graphs. In *The Proceedings of the 9th Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications*, 6 2015.