A-018

5連結平面グラフの格子直線描画
Straight-Line Grid Drawings of Five-Connected Plane Graphs

三浦　一之 *
Kazuyuki Miura

概 要

平面グラフ G の各点を整数格子の格子点上に配置し，各辺を互いに交差しない直線分として描画したものを G の**格子直線描画**という．n を G の点数とし，n は 3 以上としよう．G が 3 連結ならば，G は $(n-2)\times(n-2)$ の格子上に格子直線描画できることが知られている [1, 2, 3, 6, 7]．また，G が 4 連結ならば，G は $(n/2)\times(n/2)$ の格子上に格子直線描画できることが知られている [4, 6]．グラフの制約をより厳しく 5 連結にすることで，格子直線描画に必要な整数格子の大きさはさらに小さくなると予想されるが，どの程度小さくなるかは知られていない．本論文では，5 連結内部三角化平面グラフ G は高々$(n-m-2)\times(n/2)$ の大きさの格子内に格子直線描画できることを示すとともに，そのような描画を求める線形時間アルゴリズムを与える．ここで，m は入力グラフ G に対応して決まる変数であり，$3 \le m \le n-7$ である．

1　序論

近年，様々な分野で与えられたグラフを「構造を理解しやすく」かつ「きれいに」描画する手法が求められている [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]．平面グラフ G の各点を整数格子の格子点上に配置し，各辺を互いに交差しない直線分として描画したものを G の**格子直線描画**といい，最も基本的な描画法として広く研究されている．なお，本論文ではグラフ G の点数を n で表す．また，大きさ $W\times H$ の**整数格子**は $W+1$ 本の垂直線分と $H+1$ 本の水平線分およびそれらの交点からなり，その外周は矩形であるとする．W は整数格子の**幅**，H は**高さ**という．整数格子の幅を W，高さを H とする．格子サイズは $W\times H$ と表す．G が 3 連結ならば，G は $(n-2)\times(n-2)$ の格子上に格子直線描画できることが知られている [1, 2, 3, 6, 7]．また，G が 4 連結ならば，G は $(n/2)\times(n/2)$ の格子上に格子直線描画できることが知られている [4, 6]．グラフの制約をより厳しく 5 連結にすることで，格子直線描画に必要な整数格子の大きさはさらに小さくなると予想されるが，どの程度小さくなるかは知られていない．

本論文では，図 1 のように，5 連結内部三角化平面グラフ G は高々$(n-m-2)\times(n/2)$ の大きさの格子内に格子直線描画できることを示すとともに，そのような描画を求める線形時間アルゴリズムを与える．ここで，m は入力グラフ G に対応して決まる変数であり，$3 \le m \le n-7$ である．

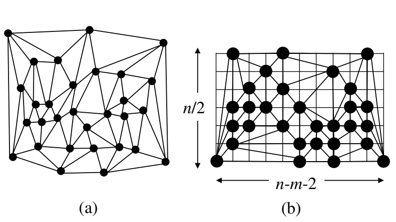

図 1: (a) 5 連結グラフ G, (b) G の格子直線描画.

2　準備

本節では，いくつかの定義と既知の補題を与える．グラフ G は点の集合 V と辺の集合 E からなり，$G=(V,E)$ で表す．辺交差なしに描画できるグラフを**平面グラフ**という．平面グラフ G は平面を連結する領域に分割する．その各領域を**面**という．無限面を**外面**とし，外面以外の面は**内面**と定義する．これらの面の境界は**面閉路**と呼ばれる．G の外面閉路を $C_o(G)$ によって表す．グラフ G の全ての内面が三角形であるならば，G を**内部三角化グラフ**という．グラフ G の任意の $k-1$ 点を取り除いてもグラフが非連結にならないならば，G は k **連結**であるという．

G を 5 連結内部三角化グラフとし，u_1,u_2,u_3,u_4 および u_5 を G の外面上にある点とする．$C_o(G)=(w_1=u_1,w_2,...,w_a=u_2,w_{a+1},...,w_b=u_3,w_{b+1},...,w_c=u_4,w_{c+1},...,w_d=u_5,w_{d+1},...)$ とする．G に対して，結果的に得られるグラフの外面上に u_1,u_3,u_4,r および u_5 がこの順に現れるように，新しい点 r と 3 本の辺 $(u_1,u_3),(u_4,r)$ および (u_5,r) を追加してできたグラフを G' とする．$W_1,W_2,...,W_i$ を互いに素な V の部分集合とするとき，$W_1,W_2,...,W_i$ の点で誘導される G' の部分グラフを G_i とし，それ以外の点から誘導される G' の部分グラフを $\overline{G_i}$ とする．このとき $\Pi=W_1,W_2,...,W_m$ が以下の条件 $(co1)-(co4)$ を満足するならば，Π を G の 5 正規分割 [5] と呼ぶ．

$(co1)$ $W_1^o=w_2,w_3,...,w_{b-1}$ とし，W_1^i を W_1^o に少なくとも 1 つ隣接点を持つ点の集合とするとき，$W_1=W_1^o\cup W_1^i$ である．

$(co2)$ $W_m=w_c,w_{c+1},...,w_d$ である．

$(co3)$ $1\le k\le m$ なる各 k に対して，G_k は 3 連結であり，$0\le k\le m-1$ なる各 k に対して，$\overline{G_k}$ は 2 連結である．

$(co4)$ $2\le k\le m-1$ なる各 k に対して，以下の 2 つのうち 1 つが成り立つ．

(a) $|W_k|\ge 2$ であり，W_k の各点は $C_o(G_k)$ および $C_o(\overline{G_{k-1}})$ 上にある．$d(u,G_k)=3$ であり，$d(u,\overline{G_{k-1}})\ge 3$ である．(図 2(a) 参照．)

(b) $|W_k|=1$ であり，$d(u,G_k)\ge 3$ であり，$d(u,\overline{G_{k-1}})\ge 2$ である．(図 2(b) 参照．)

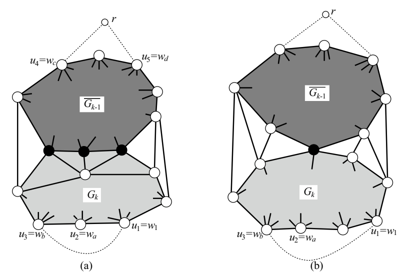

図 2: $(co4)$ の 2 つの条件.

*福島大学 理工学群 共生システム理工学類

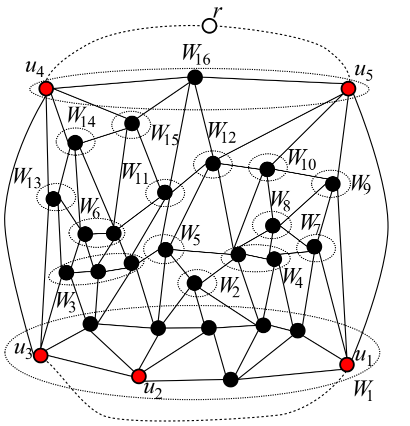

図 3: 5 正規分割．

5 正規分割 $\Pi = W_1, W_2, \cdots, W_m$ の例を図 3 に示す．以下の補題が知られている．

補題 2.1 [5]G を 5 連結内部三角化グラフとする．このとき G は 5 正規分割 Π を持ち，Π は線形時間で構成できる．

条件 (co4) から，$1 \leq k \leq m$ なる各 k に対し，W_k の点は $C_o(G_k)$ で時計回りに連続して現れるとしてよい．$W_1, W_2, \cdots, W_m$ に現れる順に G の全ての点に $1, 2, \cdots n$ と番号をつけよう．このことにより，G の点の間に大小関係 $<$ が自然に定義できる．

3 アルゴリズム

本節では本論文のアルゴリズムの概略を説明するとともに，主定理を与える．

G を 5 連結内部三角化グラフとし，$\Pi = W_1, W_2, ..., W_m$ を G の 5 正規分割とする．$C_o(G_1) = (w_1 = u_1, w_2, ..., w_a = u_2, w_{a+1}, ..., w_b = u_3, w_{b+1}, ..., w_t)$ とする．W_1 の各点の座標を図 4 上図のように定める．

次に $2 \leq i \leq m-1$ なる各 i について，G_{i-1} の描画に対して W_i の点を追加して G_i の描画を構成する．次の 2 つに場合を分けよう．

場合 1:W_i が $(co4)$ の条件 (b) を満足するとき．
このとき $w_i = \{u\}$ とし，u の G_i における隣接点を $w_p, w_{p+1}, ..., w_q$ とし，$w_{p+1}, w_{p+2}, \cdots, w_{q-1}$ の中で最少の点を w_s とする．まず $x(u) = x(w_s)$ とする．次に $y(u)$ を次のように定める．$w_p, w_{p+1}, ..., w_q$ の y 座標の最大値を y_{max} とする．もし $w_p, w_{p+1}, ..., w_q$ の中で y 座標が y_{max} となる点が2つ以上あるならば，$y(u) = y_{max}+1$ とする．そうでないならば $y(u) = y_{max}$ とする．

場合 2:W_i が $(co4)$ の条件 (a) を満足するとき．
このとき $w_i = \{u_1, u_2, ..., u_l\}$ とし，W_i の G_i における隣接点を w_p, w_{p+1}, w_{p+2} とする．まず w_{p+2} に対して，[4, 6] と同様にして $|W_i|-1$ だけ $shift$ の操作を実行する．次に，$1 \leq i \leq l-1$ なる各 i に対して $x(u_i) = x(w_p)+i$ とし，更に $x(u_l) = x(w_{p+2})-1$ とする．最後に，上の場合 1 と同様にして各点の y 座標を y_{max} または $y_{max}+1$ と定める．

最後に W_m の各点の x 座標を場合 1 と同様に定め，各点の y 座標を $y_{max}+1$ とする．図 4 にアルゴリズムの流れを示す．

次の定理が成り立つ．

定理 1 G を 5 正規分割 $\Pi = W_1, W_2, ..., W_m$ を持つ 5 連結内部三角化平面グラフとする．このとき G は高々$(n-m-2)\times(n/2)$ の大きさの格子内に線形時間で格子直線描画できる．

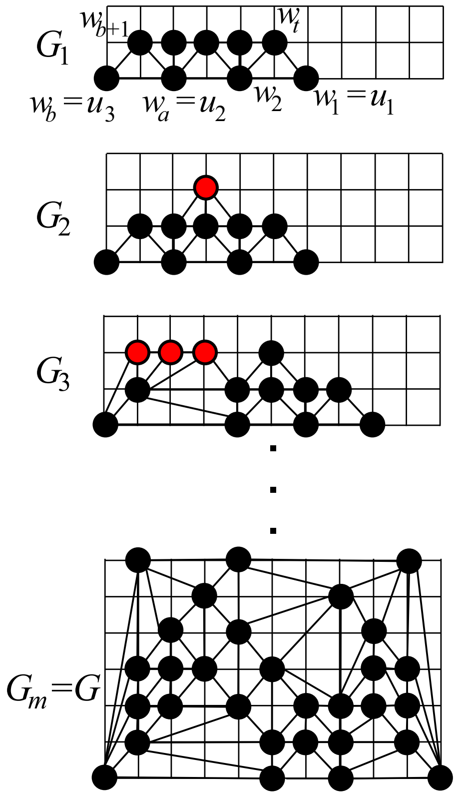

図 4: アルゴリズムの流れ．

謝辞

本研究は福島大学学内競争的研究資金 (18R006) の助成を受けたものです．本研究を行うにあたり，有益なコメントを多数頂いた豊岡なつきさんに深く感謝いたします．

参考文献

[1] M. Chrobak and G. Kant, Convex grid drawings of 3-connected planar graphs, International Journal of Computational Geometry and Applications, 7, 211–223, (1997).

[2] M. Chrobak and T. Payne, A linear-time algorithm for drawing planar graphs on a grid, Information Processing Letters, 54, 241–246, (1995).

[3] H. de Fraysseix, J. Pach and R. Pollack, How to draw a planar graph on a grid, Combinatorica, 10, 41–51, (1990).

[4] K. Miura, S. Nakano and T. Nishizeki, Grid Drawings of Four-Connected Plane Graphs, Discrete & Computational Geometry, Vol.26, No.1, pp.73–87, (2001).

[5] S. Nagai, and S. Nakano, A Linear-Time Algorithm for Five-Partitioning Five-Connected Internally Triangulated Plane Graphs, IEICE TRANSACTIONS on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, Vol.E84-A, No.9, pp.2330–2337, (2001).

[6] T.Nishizeki and M.S.Rahman, Planer Graph Drawing, World Scientific, Singapore, (2004).

[7] W. Schnyder, Embedding planar graphs on the grid, Proc. 1st Annual ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms, San Francisco, 138–148, (1990).