A-003

グラフのn多角形上描画可能性判定アルゴリズムについて

平澤　紹　　　宮田 洋行　　　中野 眞一
群馬大学大学院理工学府

1　はじめに

今日，抽象的な関係や構造を表現するためにさまざまな所でグラフが利用されている．グラフを理解する際，同じグラフであっても描画の仕方により，理解のしやすさが大きく異なるため，より理解しやすいグラフの描画がさかんになされている．例えば，なるべく枝が交差しないグラフや，枝同士の成す角度が大きいグラフは理解しやすいと考えられ，そのようなグラフの描画方法について多くの研究がなされている．また，グラフの頂点を全てある曲線上に配置して描画できるグラフが研究されており，例えば，二本の平行な直線上に各頂点を置き全ての枝を直線で交差無く描画できるグラフの特徴付けがわかっている [1]．また，k-外平面的グラフは，k 個の同心円上に頂点を配置し全ての枝を直線で交差無く描画できるグラフと等価であることがわかっており [2]，特に，外平面的グラフは同一円周上に頂点を配置して描画できるグラフとして特徴づけられることがわかっている．

本研究では，外平面的グラフをさらに，ある凸多角形上に描画することを考える．上記の結果 [2] より，外平面的グラフは，その頂点数を n としたとき，凸 n 角形上に頂点を配置し，直線描画可能であることがわかるが，本研究では，より小さな凸多角形上に描画することを考える．具体的には，まず，凸 n 角形上に頂点を配置し，直線描画可能であるグラフ (**凸 n 角形描画可能**なグラフと呼ぶことにする) の構造を特徴づけ，その特徴づけに基づき，与えられたグラフが凸 n 角形描画可能であるか判定する $O(V)$ (V:グラフの頂点数) で判定するアルゴリズムを与える．

2　諸定義

本節では，本論文で用いる定義を紹介する．以下の概念は，論文 [1] に現れるものであり，詳細はそちらを参照していただきたい．グラフ G の関節点の内, 閉路に含まれる頂点を**連結点**と呼ぶ．G の連結点 v を，v を削除すると G をパスの和 P とそれ以外にわけるような頂点とする．そのとき，P の頂点と v から誘導される部分グラフを G の**単線成分**と呼ぶ．G から全ての単線成分を取り除いたグラフを $\widetilde{G}$ とする．$\widetilde{G}$ から連結点を除去すると，いくつかの連結成分が得られるが，その連結成分の頂点と連結点から誘導される部分グラフを**複線成分**と呼ぶ．このように考えて G を単線成分，複線成分に分解することを，G の**連結点分解**と言う (図 1 参照)．さらに，$\widetilde{G}$ の連結点分解の複線成分の接続関係を表すグラフを導入する．$\widetilde{G}$ の各複線成分を頂点とし，その成分が同じ連結点を共有するときに枝を結ぶことによって定義されるグラフを，**成分木**と呼ぶ．ここで，成分木の各成分は木または 2-連結グラフとなることに注意する．今後，成分木の各成分ごとに描画し，その描画を組み合わせて，グラフの描画を行う．

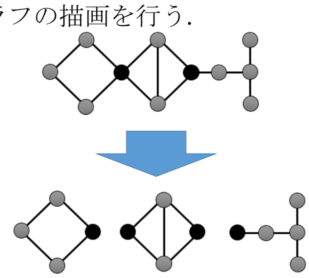

図 1: 連結点分解の例

3　2 直線描画可能なグラフ

凸 n 角形描画可能なグラフを考察する際，多角形の 1 つの角を使って描画できるグラフが一つの基本要素となる．このようなグラフは，平行な 2 直線の上に各頂点を配置して直線描画可能なグラフ (**2 直線描画可能**なグラフと呼ぶことにする) と一致するが，そのようなグラフは先行研究 [1] で特徴づけられている．本節では，その結果を紹介する．

2 直線描画可能なグラフを考えるときは，まず前節のように連結点分解を行い，複線成分ごとに描画可能なグラフを考える．各成分は木か 2-連結グラフであるので，それらの 2 直線描画可能な条件を考えればいいことになる．その条件は，以下のようにわかっている．

命題 3.1 ([1]) 木 T が 2 直線描画可能である必要十分条件は，T のコア枝がパスを誘導することである．

ただし，木 T の枝で，その枝を削除したときに得られる 2 つの連結成分が共に次数 3 以上の頂点を持つとき，その辺を**コア枝**と呼ぶ．

命題 3.2 ([1]) 2 連結グラフ B の 2 直線描画可能な必要十分条件は，B が外平面的，かつ B の外面を無視した双対グラフがパスになることである．

以上に基づき，一般のグラフが 2 直線描画可能な条件が与えられる．

定理 3.3 ([1]) グラフ G の 2 直線描画可能な必要十分条件は，以下の全ての条件を満たすことである．

1. G は外平面的グラフである．
2. G の成分木がパスになる．
3. G の各複線成分が 2 直線描画可能である．
4. G の各複線成分同士は 2-外側配置可能な頂点を連結点として接続されている．
5. G の各単線成分は複線成分同士を接続する連結点か成分木における端点に対応する成分の 2-外側配置可能な頂点に接続される．単線成分と接続している頂点に隣接する 2-外側配置可能な頂点の 1 つは高々1 つのパスと接続される．

ただし，**k-外側配置可能**な頂点とは，凸 k 角形描画した際に各辺の上で端に描画可能な頂点を指す．

4 凸 n 角形描画可能なグラフ

本研究では，先行研究 [1] に基づき，凸 n 角形描画可能なグラフの考察を行う．まず，先行研究 [1] と同様，連結点分解を行い，成分ごとに凸 n 角形描画可能な条件を考える．各複線成分は，木あるいは 2-連結グラフとなるが，それらが凸 n 角形描画可能な条件は以下のように記述できることがわかる．紙面の都合上，証明は省略する．

命題 4.1 木 T の凸 n 角形描画可能であるための必要十分条件は，T のコア枝が n 個以下の葉を持つ木を誘導することである．

命題 4.2 2-連結グラフ B の凸 n 角形描画可能であるための必要十分条件は， B が外平面的，かつ B の外面を無視した双対グラフが n 個以下の葉を持つ木になっていることである．

定理 4.3 グラフ G の凸 n 角形描画可能であるための必要十分条件は，G が以下の全ての条件を満たすことである．

1. G は外平面的グラフである．
2. G の成分木の葉の数が n 個以下である．
3. 以下のような条件を満たす G の成分木の頂点の非負重みが存在する．
   - 成分木の各頂点 v は d_v-2 以上の重みを持つ．ここで d_v は v の次数である．
   - 成分木の頂点の重みの和が $n-2$ 以下となる．
   - 重み w を持つ頂点に対応する成分は，凸 $(w+2)$ 角形描画可能である．
4. G の各複線成分同士はその複線成分の成分木における重みを w としたとき $(w+2)$-外側配置可能な頂点を連結点として接続されている．
5. G の各単線成分は複線成分同士を接続する連結点か成分木の葉に対応する成分の $(w+2)$-外側配置可能な頂点 (w は成分木における重み) に接続される．単線成分と接続している頂点に隣接する $(w+2)$-外側配置可能な頂点の内の 1 つは高々1 つのパスと接続される．

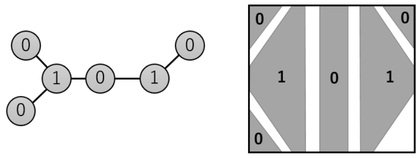

図 2: 左 : 四角形上に描画可能なグラフの成分木と重みの例 右 : 左の成分木の各複線成分の四角形上での配置例

5 凸 n 角形描画可能性判定アルゴリズム

前節の結果に基づき，与えられたグラフ G が凸 n 角形描画可能か判定する以下のようなアルゴリズムを設計することができる．まず，G が外平面的か調べる．これは，$O(V)$ (V: G の頂点数) で行うことが可能である (例えば，[3] を参照)．次に連結点分解を行い，成分木を計算し，成分木の葉の数が n 以下であることをチェックする．これは，2-連結成分分解を行った後，関節点が閉路に含まれるか調べ連結点分解を行うことで，$O(V)$ 時間で行うことが可能である．その後，条件 3 を満たす重みが存在するか調べるため，各成分ごとに，その成分が凸 r 角形描画できる最小の r を計算する．成分が 2-連結の場合は双対グラフの葉の数が最小の r となるので，$O(V)$ 時間で計算でき，成分が木の場合は，コア枝が誘導する木の葉の数を数えればよく，$O(V)$ 時間で計算することができる．そして，成分木の各頂点 v にその最小の r 以上かつ d_v-2 以上の最小の数を重みとして割り当て，重みの和が $n-2$ 以下か調べることで，条件 3 の確認を $O(V)$ で行うことができる．最後に複線成分同士や単線成分が条件 4，5 を満たすようにに接続されているか $O(V)$ 時間で調べる．以上のことより，凸 n 角形描画可能性は $O(V)$ の計算時間で判定可能であることがわかる．

参考文献

[1] S. Cornelsen, T. Schank and D. Wagner, Drawing Graphs on Two and Three Lines, Proceedings of 10th International Symposium on Graph Drawing (GD 2002), pp 31–41, 2002.

[2] E. Di Giacomo, W. Didimo, G. Liotta and H. Meijer, Computing Radial Drawings on the Minimum Number of Circles, Journal of Graph Algorithms and Applications, 9(3), pp.365–389, 2005.

[3] S. L. Mitchell, Linear algorithms to recognize outerplanar and maximal outerplanar graphs, Information Processing Letters 9(5), pp.229–232, 1979.