K-019

新しい一次方程式の解法について

和田　平司　　久持　佳織　　松下　斉昭　　藤江　鉄平　　永末　裕也
手塚　理恵　　山本　敦子　　稲富　恵　　木村　裕弥　　大島　雅史

On The Analysis of New Theory for a linear equation

Heiji WADA　Kaori HISAMOTI　Nariaki MATUSITA　Tepei FUJIE　Yuya NAGASUE
Rie TETUKA　Atuko YAMAMOTO　Megumi INATOMI　Yuya KIMURA　and　Masasi OOSIMA
所属なし。

あらまし　　小学校や中学校では、一次連立方程式の解を求めるには、１）代入法により用いる。その場合、一般に変数の数だけ連立方程式を組み立てる必要がある。我われの研究チームは、変数が２個の場合、１個の一次方程式で解を求める事ができる．しかし、条件が次の場合に限る。１） ｘ、ｙの値が整数、かつ２）係数及び、定数、a,b,とｃが、a,b,c ＞ 0,である。そして、命題１)～１７）を定義する事により、変数、ｘ、ｙの解が求まる。

そして、１個の一次方程式の解を求めるアルゴリズムとプログラムを求めた。そして、考察をくわえて、理論的に解が求まることを証明した。

その解は、１個の一次方程式の最適な、ｘ、ｙの値をもとめている.その事により、低級の CPU でも、高速に解を求める事が出来る。

キーワード　代数学、線形代数、ｃ++言語プログラム、コンピュータ工学

１　前書き　　教育工学的に，小中学校では変数が２個の場合、２つの一次方程式の連立式から、代入法により解を求めている。

この場合、変数がｎ個の場合、ｎ連立一次方程式を求める必要がある。

が、我われの研究チームでは、変数が２個の場合、１個の一次方程式から解をもとめる事が出来た。即ち，①式から、解を求めるアルゴリズムを見出した。

ａ・ｘ　＋　ｂ・ｙ　＝　ｃ　・・・・①

上式から解、ｘ、ｙを求める事が出来る。

(ａ，ｂ ，ｃ＞０,で、x、y＞０、で整数である。)

この場合。ｘ、ｙの解を求めるにあたり、命題１)～17）を定義した。それより、ｘ、ｙの解を求める公式を導出した。

今までは、①式のみでは，交点がｘ、ｙ座標では定まらないので、解を求める事は、不可能であった。然し、我われの研究チームはベクトルの概念を用いる事により、解を求める事に成功した。

更に、プログラムの教育が、低学年でも始まる事から、プログラムによるアルゴリズムを求めることが出来た。

低級の CPU でも高速の演算処理を可能に

した・その事から、ｘ、ｙの解を求めるに当たり、最適な値についての検討を加えた結果、理論的に、公式を用いて求める事が出来た。

２　本論

２－１）　①式のみで、ｘ、ｙの解を求めるに当たり、次のような命題を、準備した。

但し、命題を考えるうえで、ユークリッド空間と、単位ベクトルの概念を用いて、命題を定義した。

命題１）　ユークリッド空間に於いて、単位ベクトル Ex、Ey、を定めた。

命題２）　単位ベクトルの和は１、である。

$$Ex + Ey = 1$$

命題3）単位ベクトルの積は、0である。

$$Ex \cdot Ey = 0$$

命題４）　単位ベクトルの累乗は、単位ベクトルになる。

命題５）　単位ベクトルの累乗が偶数の場合は、

$$Ex = -Ex,$$

$$Ey = -Ey$$

命題６）　一次方程式の変数 x、y の値が等しい場合、c は、係数の a,b の何れか一方で切れる。

命題７）　係数が、a, b とも偶数である場合、値ｃは奇数になることはない。

命題８）｜（ｂ－a）｜, が、解を持つためには、係数 a, b のいずれかが、偶数で、片方が、奇数の場合｜（b－a)｜、は必ず奇数になり、c が奇数の場合解になる。

命題９）　a, b, が両方とも奇数の場合、必ず｜（ｂ－ a)｜の差は偶数になり x, y の何れか一方の解になりえる。

命題１０）　｜（b －a)｜＝　１、の場合公式に則って、解を求める。式の証明を行う。

命題１１）　a, b の何れかが、１の係数を持つ場合、解は幾らでも存在するが、公式に代入すると、最適値のｘ、ｙが求まる。式の証明を行う。

命題１２）　係数 a, b の、何れかが、奇数と、偶数の場合、公式により求まる。式の証明を行う。

命題13）　$aX + bY = C$　①式、に於いて、C の値が奇数の場合で、あ、ｂ＞＝０、が奇数で、C－（a+b）＞ 2, の場合に必ず解を持つ。

奇数は必ず、$2i + 1 = n$（$i = 1, 2, 3, \cdots$）

命題14）$aX + bY = C$　①式、に於いて、a, b, C, が奇数で、（a ＋ b）＜ C、で且つ, $a \neq nb$、の場合解を持つ。

命題１５）　a, b, C, が奇数で、（a ＋ b）＜ C　$a = nb$, の場合は、一意に解を持つとは云えない。C/b, で割り切れれば解を持つ。

命題１６）　単位ベクトルに於いて、

$$Ey = (Ey + Ex)Ey = Ey^2 = Ey = -Ey$$

（Ex, も同様である。）

命題 17）

$$aEy - \alpha ExEy = aEy - \alpha Ey - \alpha Ey^2$$
$$= (a - 2\alpha)Ey$$
$$(\because a - 2\alpha = 0)$$
$$= (a + 2\alpha)Ey$$
$$(\because a + 2\alpha = 0)$$

2-2） アルゴリズム

各種レジスターの設定。

カーソルから、a,b,C,の値の入力。

求める変数ｘ、ｙ、が同じ値を持つ場合から、アルゴリズムを以下のように導ける。

① b > a の場合。

まず、m = a + b 、を求めて、

h = C / m Ⓐ

が割り切れたら、

h,は、x,又は、ｙの何れかの解になる。

割り切れなかったら、以下の処理。

② m = (b ― a) ,b > a,でｍを求めて、

K ＝ C / m Ⓑ

割り切れたら、ｋ、はｘ、又わ、

ｙの解を持つ。

割り切れなかったら、以下の処理を行う。

K ＝(C ―a) /(b－a) Ⓒ

又わ、

ｌ =(C ―ｂ）/(b ―a) Ⓓ

③ ⒸとⒹを演算して、割り切れたら

ｋ、ｌ、はｘ、又わ、ｙの解になる。

割り切れなかったら、以下の演算を行う。

④ p= (C ―a)/{(b ―a) +b} Ⓔ

又わ、

q= (C―ｂ）/{(b ―a) +a} Ⓕ

p，又は、ｑが割り切れたら、ⒺとⒻは、ｘ又わ、ｙの解になる。

割り切れなかったらエラー処理を行う。

2－３） プログラムについて

本プログラムの例題は、ステップ①の処理を行うプログラムについて述べている。

ステップ②以降については、ステップ①と同様にう。

ステップ②、③，④、については、本プログラムを参照して頂きたい。

ステップ①のプログラム例

```
#include<isotream.h>
#include<Cmath.h>
#include<Cman.ip>

main
{
  INT  a=0,b=0,C=0,Cab=0,j=0,i=0 ;
  INT  x=0,y=0,hxy=0 ;
  INT  h=0,l=0,m=0,p=0,o=0,k=0 ;



  Cin<< a ;
  Cout<< a , a=¥n>> ;
  Cin<< b ;
  Cout<< b, b=¥n>> ;
  Cin<<C ;
  Cout<<C, C=¥n>> ;
```

```
Scanf( “%d” ,&a) ;
Scanf(“%d”,& b) ;
Scanf(“%d%”,&C) ;
Scanf(“%d”,&h) ;
Scanf(“%d”,&l) ;
Scanf(“%d”,&m) ;
Scanf(“%d”,& p) ;
Scanf(“%d”,&q) ;
Scanf(“%d”,& k) ;
m=b+a;
If m≧0 else Error① ;

Cab=C ;
if Cab%m==0 else step② ;
X=Cab/m;
Y=c/b-a/bX;
i= aX;
j= bY;
hxy = i + j
if hxy=C else ANS②
CALL SUB1;
ANS② Y=Cab/m;
X=c/a-(b/a)Y ;
i = aX ;
j = bY ;
hxy = i + j ;
If hxy=C else Error①;
CALL SUB1;

Error① printf(“error①”);
Step② ～ Cab=C-a;

SUB1 printf(“x”, X=¥m);
printf(“y”, Y=¥m);
return;
}
```

補足　命題８）の公式の導出，及び証明。

aEx + bEy ＝ aEx + bEy

+ aEy - aEy

+ bEx + bEx

a(Ex + Ey) + b(Ex + Ey)

＝ (a + b)Ex

+ (a + B)Ey

$0 = Ex^2 - Ey^2$

＝ (Ex + Ey) (Ex − Ey)

∵ Ex ＝ Ey

∴ Ey ＝ c/(b + a)

又は、

∵Ex ＝ −Ey

∴ Ex ＝ c/(b - a)

命題 9）の式の導出及び証明

aEx + bEy ＝ aEx + bEy

+aEy - aEy

＝

a(Ex - Ey) + bEy - aEy

∴

a + (b - a)Ey ＝ aEx + bEy

＝ c

∴ Ey ＝ (c - a)/(b - a)

命題 10)の式の導出及び証明

a + (b - a)Ey ＝ aEx

+ αExEy + bEy

=−bEy + Ex(a + αEx)

=C

∴ Ey = (C — a)/{(b — a) ＋ b}

3　考察

3-1)　　例題について

例題１）

２x＋８y ＝ 24　　　①式

①式が、与えられた場合

Ｃ／（ｂ－ ａ）＝ 24 / (8 -2)

=24 /6 ＝ 4、が求まる。

この求まった値を①式の、ｘ，ｙ

に代入し、逐次解を求める。と、

ｘ=４、が求まり,ｙ ＝ 2,が求まる。

例題２）

11x ＋ 3y ＝ 53　　②式

②式が求まると、

（Ｃ－ｂ)/(b － a) ＝

50 / 8 =4 ,が求まる。

この求まった値を②式に代入し、

逐次解を求めると、

ｘ、又わ、ｙが、ｙ＝３、が求まり。

故に、x＝ 4,が求まる。

例題３）

２ｘ ＋ 7y ＝ 34　　③式

③式が求まると、

(C － b) / (b ＋ a) ＝ 27/9

＝ 3

が,求まる。

この求まった値を、ｘ、ｙに逐次

代入して、ｘ＝３、が求まり、

ｙ＝４，が求まる。

例題４）

２ｘ ＋ 1y ＝ 30　　④式

④式が求まると、

（C － a)/ {(|b － a|) ＋ b}＝ 28/2

=14

が、求まると。ｘ，ｙ，は何れかが１４の値を

持つ。

ｘ ＝ (30 ＝ 14)/2 ＝ 8,が求まる。

3-2)　最適値の考察について

例題１)～例題４）について、最適値のｘ、ｙを

求めている。

但し、本論文では、a,b,C,>0,の場合について、

述べている。

例題４）のばあい、ｘまたわ、ｙの係数に、１が

ある場合に、ｘ、とｙの解は幾とおりも存在する

が、本論文の場合は、最適な、ｘ、とｙ、の値を

求めている。

例えば、例題４）の場合、ｘ＝８、ｙ＝１４で

ある。

C、の値が、３０であり、トータルの値は、

X、の項が、１６、で、ｙの項が１４である。

この差は２、である。し、ｘとｙの差は６。

若しも、ｘの値がｘ＝７、とすると、ｙの値は、

ｙ＝１６となる。

トータルの差は、２である。が、ｘとｙの

値の差は、９である。

又、ｘの値が９とすると、ｙ＝１２となる。

トータルの差は、６である。

が、ｘとｙの差は、３である。

が、本論文で求めた値、ｘとｙはトータル

でも、ｘとｙを個数とした場合、最適値になって

いるのが分かる。

４　結論

一般的に、ｎ連立一次方程式の解を求める。場合、ｎ個の連立方程式が必要になる。

これを求めるに当たって、代入法や、行列や、逆行列を求めて解を求めるのが普通である。

変数が２つの場合は、２つの一次方程式が必要になる。

我われの研究チームは、１つの一次式で、解を求める事に成功した。

然も、ｘ、ｙ、の求めた値は、最適な値を求める事ができた。

其の場合に、命題１)～命題１７）までを定義して，幾とおりかの公式を導いた。

そして、解をプログラムを用いて解を求める為のアルゴリズムを導く事ができた。

但し、我われの研究チームは、

ax + by = C　①

①　に於いて、変数ｘ、ｙ、の係数が、a，b，C,>0,の条件の場合の解である。

一般的、物理条件の場合は、これで宜しいが。
どちらかの係数が負である場合や、両方が負である場合に付いては、考察中であり、我われの公式で、変数ｘ、ｙ、の解が求まる見通しがある程度は出来ている。

其処で、我われの研究チームは、本論文を、教育工学的観点から考察することを，試みることにする。

或る生徒に、問題を提示して、アルゴリズムのフローチャートに沿って問題を解く場合に、その生徒が，何処のステップで、躓いているのかが明確になる。

また、ステップは、どの公式の場合も簡単であり、生徒の理解度も把握できる。

ステップが幾つかあるなかで、その生徒が，なぜ一意に、或るステップを選び、使用して、解を導出、したとすると。

其の生徒の解が誤りであるのか、生徒が何処の間で、一次方程式の解の導出に対して悩む場所が的確に把握出来る。

これからの数学に、プログラムを用いて教育の指導ができるので、将来の科学や数学に対して発展される教育が出来る。

残されえた課題として、ｎ連立一次方程式も、①式の形まで変形できるので、ｎ連立一次方程式の解法の新しい理論の導出が残されている。

また、a<0,b>0.C>0,の場合や、其の逆や、a,b,<0,で、C>0,の場合についての、検証が残された課題である。

教育工学的観点からの考察が残された課題である。

謝辞　　終始、助言を頂いた近畿大学の大木教授、KDDI の研究所の古賀氏や安田会長、並び、九州大学の関連者や東海大学の関係部署や、九州工業大学の関係者に深謝する。

参考文献

森田　康夫　著作　“代数概論”　裳華房　１９８７
斉藤　正彦　著作　“線形代数入門”　東京大学出版会　１９６６
大原　英郁　著作　“C 言語基礎”　工学社　　２００７
Mikurosoft　Microsoft　VisualC++　２０１５