

劣化画像復元のための DFT 係数の確率分布モデル： 多次元混合型
球対称ガウス分布モデルとそのパラメータ推定

Probability Distribution Model of DFT Coefficients for Restoration of Degraded Images:
Multidimensional Mixture Spherically-Symmetric Gaussian Probability Distribution Model and
Its Parameter Estimation

齊藤 隆弘[†] 小松 隆[†]
Takahiro Saito Takashi Komatsu

1. はじめに

筆者らは、最近、動画復元への応用を念頭に置き、短時間三次元 DFT (3-D Short-Time DFT: 3-D ST-DFT) にその前処理として局所的な平均値分離を導入することで、3-D ST-DFT の応用上の問題点を解決し、新たに平均値分離型三次元 ST-DFT (3-D Mean-Separation-type Short-Time DFT: 3-D MS²T-DFT) を提案し^[1]、これを雑音によって汚された劣化動画の復元に適用することにより、現在最高水準の雑音除去能力を有するとされている CVBM3D 法^[2] と同等以上の優れた動画復元性能が実現されることを実験的に明らかにしてきた^[3]。本研究では、動画復元性能のさらなる改善を図るため、劣化画像の DFT 係数に対する復元処理にその理論的基盤を提供する“DFT 係数の統計的モデリング”について、理論的検討を詳細に加えている。

実部と虚部を有した DFT 係数の確率分布モデルは、とくに画像信号に対しては、DFT 係数の大きさ (Magnitude, Radius) と位相 (Phase) に分離して取り扱うのが理に適っている。なぜならば、画像の DFT 係数の位相は、単位円周上に一様に分布するものと期待されるからである。よって、画像の DFT 係数の確率分布モデルは、二次元球対称分布として近似的に統計的にモデリングできるものと期待される。なお、本研究では、二次元の場合に限定せず、一般的に多次元球対称分布^[4]として議論を進めている。

本研究では、3-D MS²T-DFT の動画復元への応用を想定し、観測信号の劣化モデルと信号の疎性 (Sparsity) を陽に含んだ多次元球対称確率分布モデルである多次元混合型球対称ガウス分布 (Multi-dimensional mixture spherically-symmetric Gaussian distribution) を取り上げ、劣化した観測データから真のデータを推定する位相保存型 Shrinkage 関数 (Phase-preserving-type shrinkage)^[5] を多次元混合型球対称ガウス分布モデルの最小二乗型 (MMSE: Minimum Mean Squared Error) ベイズ推定関数として構成している。この多次元混合型球対称ガウス分布モデルは、静止画像の変換係数の統計的モデリングのために筆者らが先に考案した“混合ガウス分布モデル”^[6]を拡張し、さらに球対称化した多次元確率分布モデルに相当している。また、本研究では、観測信号の簡単な統計量が与えられたとき、観測信号に適合する多次元混合型球対称ガウス分布のパラメータを推定する簡易な手法を提案している。この提案法は、モーメント法 (Moment approach) に分類される反復的なパラメータ推定手法である。さらに、静止画像や音響信号の直交変換係数やウェーブレット係数等の統計的モデリングに有用かつ標準的な確率分布として、信号復元や画像復元の分

野でこれまで盛んに研究されてきた“一般化ガウス分布 (Generalized Gaussian distribution)”^{[7],[8]}を球対称化して得られた多次元確率分布である“多次元球対称一般化ガウス分布 (Multi-dimensional spherically-symmetric generalized Gaussian distribution)”を取り上げ、二次元球対称一般化ガウス分布に従う確率変数の統計量に本パラメータ推定手法を適用し、二次元球対称一般化ガウス分布に二次元混合型球対称ガウス分布モデルを当て嵌めている。二次元球対称一般化ガウス分布では、観測データの劣化モデルや信号の疎性は何ら想定されていないが、二次元混合型球対称ガウス分布モデルへの当て嵌めを通して観測信号の劣化モデルと信号の疎性とに関連付けられ、劣化した観測データから真のデータを推定する位相保存型 Shrinkage 関数が二次元混合型球対称ガウス分布モデルの MMSE ベイズ推定関数として構成される。

また、本研究では、理論的考察に加え、劣化モデルと信号の疎性を陽に含んだ観測信号の統計的モデリングが、“生物の視覚の経験に基づく発現機構の解明”に寄与する可能性についても論じている。

2. 多次元混合型球対称ガウス分布モデルと MMSE ベイズ推定

観測信号の劣化モデルと信号の疎性を陽に含んだ多次元混合型球対称ガウス分布について述べ、さらにこの確率分布モデルに対する MMSE ベイズ推定関数を導出することで、劣化した観測データから真のデータを推定する位相保存型 Shrinkage 関数を導出している。

2.1 多次元球対称分布の定義とその確率密度関数

平均 $\bar{\mathbf{0}}$ の n 次元球対称分布の確率密度関数 $p_n(\bar{\mathbf{y}})$ は、次式の一般形式で表現される^[4]。

$$p_n(\bar{\mathbf{y}}) = \varphi_n(\|\bar{\mathbf{y}}\|^2 / \zeta^2) \quad (2.1)$$

なお、式(2.1)に含まれているパラメータ ζ は分布の広がりを制御するパラメータである。さらに、 n 次元確率変数ベクトル $\bar{\mathbf{Y}}$ の大きさ $R = \|\bar{\mathbf{Y}}\|$ (Magnitude, Radius) も確率変数であり、この確率変数 R の確率密度関数 (Radial density function と言う) は、次式にて与えられる^[4]。

$$h_n(r) = \frac{2 \cdot \pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \cdot r^{n-1} \varphi_n\left(\frac{r^2}{\zeta^2}\right) \quad (2.2)$$

2.1.1 多次元球対称ガウス分布

球対称ガウス分布は、最も基本的かつ最も重要な球対称分布である。平均 $\bar{\mathbf{0}}$ の n 次元球対称ガウス分布は、 n 次元独立同一 (Independently & Identically Distributed: IID) ガウス分布とまったく同じ確率分布である。以降では、平均 $\bar{\mathbf{0}}$ 、

[†] 神奈川大学, Kanagawa University

分散 σ^2 の n 次元球対称ガウス分布を, $\mathcal{G}_n(\bar{\mathbf{0}}, \sigma^2)$ と簡潔に表記している.

n 次元球対称ガウス分布 $\mathcal{G}_n(\bar{\mathbf{0}}, \sigma^2)$ の確率密度関数 $p_n(\bar{\mathbf{y}})$ は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} p_n(\bar{\mathbf{y}}) &= g_n(\bar{\mathbf{y}}; \bar{\mathbf{0}}, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n g_1(y_i; 0, \sigma^2) \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \cdot \exp\left(-\frac{\|\bar{\mathbf{y}}\|^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.3) \\ g_1(x; 0, \sigma^2) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

ただし, $g_1(x; 0, \sigma^2)$ は, 平均 0 , 分散 σ^2 の一次元ガウス分布の確率密度関数である. また, 確率変数ベクトル $\bar{\mathbf{Y}}$ の大きさ R の確率密度関数 (Radial density function) $h_n(r)$ は, 次式で与えられる.

$$h_n(r) = \frac{2}{\Gamma(n/2) \cdot (2\sigma^2)^{n/2}} \cdot r^{n-1} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.4)$$

二次元の場合は, レイリー (Rayleigh) 分布に帰着する.

2.1.2 多次元球対称一般化ガウス分布

一般化ガウス分布は, これまで, 静止画像や音響信号の変換係数の統計的モデリングに有用かつ標準的な確率分布であるとされてきた [7], [8]. ここでは, 一般化ガウス分布を球対称化した多次元確率分布である多次元球対称一般化ガウス分布 [4] を取り上げる.

正のスケールパラメータ α と正の形状パラメータ β を有する平均 $\bar{\mathbf{0}}$ の n 次元球対称一般化ガウス分布 $\mathcal{GG}_n(\bar{\mathbf{0}}, \alpha, \beta)$ の確率密度関数 $p_n(\bar{\mathbf{y}})$ は, 次式で与えられる.

$$p_n(\bar{\mathbf{y}}) = \frac{\beta \cdot \Gamma(n/2)}{\pi^{n/2} \cdot \alpha^{n/2} \cdot 2^{2\beta} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2\beta}\right)} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\|\bar{\mathbf{y}}\|^2}{\alpha}\right)^\beta\right) \quad (2.5)$$

ここで, $\beta > 1$ ならば n 次元球対称ガウス分布よりも裾野が短い分布となり, $\beta = 1$ ならば n 次元球対称ガウス分布となり, $\beta = 1/2$ ならば n 次元球対称ラプラス分布となり, $0 < \beta < 1/2$ ならば n 次元球対称ラプラス分布よりも裾野が長い分布となる. 静止画像の変換係数の確率分布モデリングに関するこれまでの研究によれば, 静止画像の変換係数 (ただし直流係数は除く) の確率分布は, ラプラス分布と同程度の裾野の長さの一般化ガウス分布で良好に近似されることが明らかにされている [7], [8].

確率変数ベクトル $\bar{\mathbf{Y}}$ の大きさ R の確率密度関数 (Radial density function) $h_n(r)$ は, 次式で与えられる.

$$h_n(r) = \frac{2\beta}{\alpha^{n/2} \cdot 2^{2\beta} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2\beta}\right)} \cdot r^{n-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{\alpha}\right)^\beta\right) \quad (2.6)$$

また, 大きさ R の k 次モーメント (ただし, k は 1 以上の整数) $M_k^{(n)}$ は, 次式で与えられる.

$$M_k^{(n)} := \mathbb{E}[r^k] = \int_0^\infty r^k \cdot h_n(r) dr = 2^{\frac{k}{2\beta}} \alpha^{\frac{k}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+k}{2\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2\beta}\right)} \quad (2.7)$$

図 1 には, 二次元球対称一般化ガウス分布 $\mathcal{GG}_2(\bar{\mathbf{0}}, \alpha, \beta)$ に従う二次元確率変数ベクトル $\bar{\mathbf{Y}}$ の大きさ R の確率密度関

数 (Radial density function) $h_2(r)$ を, 形状パラメータ β を $0 < \beta \leq 1$ の範囲内の種々の値に設定した場合について示した. なお, 図 1 では, 各 β の値に対し, 大きさ R の二次モーメント $\sigma_R^2 := M_2^{(2)}$ が次元数 $n=2$ に等しく $\sigma_R^2=2$ となるように, スケールパラメータ α を設定している.

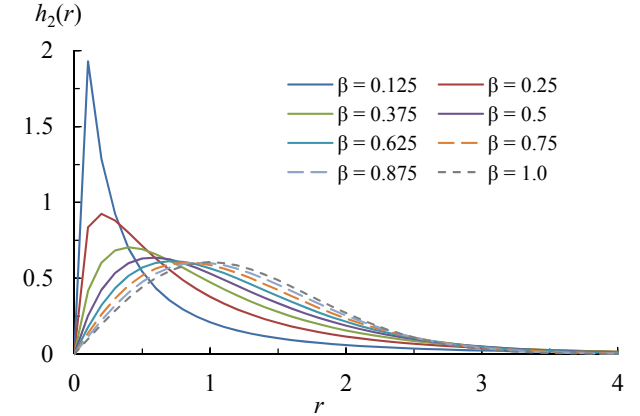


図 1 二次元球対称一般化ガウス分布に従う確率変数ベクトル $\bar{\mathbf{Y}}$ の大きさ R の確率密度関数 $h_2(r)$

2.2 多次元混合型球対称ガウス分布: 劣化モデルと信号の疎性を含んだ多次元球対称確率分布モデル

劣化した観測画像の DFT 係数の統計的モデリングのためには, 観測信号の劣化モデルと信号の疎性を陽に含んだ多次元球対称確率分布をモデル確率分布として採用することが望ましい. 本研究では, この観点から, 多次元混合型球対称ガウス分布を意味付け, 劣化モデルと信号の疎性を陽に含んだ “多次元混合型球対称ガウス分布の一つの型式” を構成している.

2.2.1 疎性を有する信号の劣化モデルと多次元混合型球対称ガウス分布

1) 非有意信号と有意信号の混合型事前確率分布モデル

疎性を有する n 次元の原信号 $\bar{\mathbf{x}}$ の事前確率分布モデル $p_s(\bar{\mathbf{x}})$ を, 非有意な信号に対応した比較的小きな分散 $\sigma_{s,[0]}^2$ の n 次元球対称ガウス分布 $\mathcal{G}_n(\bar{\mathbf{0}}, \sigma_{s,[0]}^2)$ と, 有意な信号に対応した比較的大きな分散 $\sigma_{s,[1]}^2$ の n 次元球対称ガウス分布 $\mathcal{G}_n(\bar{\mathbf{0}}, \sigma_{s,[1]}^2)$ を確率的に混合した確率分布として,

$$p_s(\bar{\mathbf{x}}) = f_n(\bar{\mathbf{x}}; P_0, \sigma_{s,[0]}^2, \sigma_{s,[1]}^2) \quad (2.8)$$

$$:= P_0 \times g_n(\bar{\mathbf{x}}; \bar{\mathbf{0}}, \sigma_{s,[0]}^2) + P_1 \times g_n(\bar{\mathbf{x}}; \bar{\mathbf{0}}, \sigma_{s,[1]}^2)$$

$$, 0 \leq P_0 \leq 1, 0 \leq P_1 \leq 1, P_0 + P_1 = 1; \sigma_{s,[0]}^2 < \sigma_{s,[1]}^2$$

と定義する. 式(2.8)の事前確率分布モデルは, それ自体が混合型球対称ガウス分布モデルとなっている.

2) 劣化した観測信号の確率分布モデル

原信号 $\bar{\mathbf{x}}$ に雑音 $\bar{\mathbf{w}}$ が加わった劣化信号 $\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{w}}$ が観測される条件付確率 $p_w(\bar{\mathbf{y}} | \bar{\mathbf{x}})$ が, 平均 $\bar{\mathbf{x}}$, 分散 σ_w^2 の n 次元球対称ガウス分布 $\mathcal{G}_n(\bar{\mathbf{x}}, \sigma_w^2)$ に従うと仮定し, 劣化信号 $\bar{\mathbf{y}}$ が観測される確率 $p(\bar{\mathbf{y}})$ を評価すると, 次式となる.

$$\begin{aligned} p(\bar{\mathbf{y}}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_s(\bar{\mathbf{x}}) p_w(\bar{\mathbf{y}} | \bar{\mathbf{x}}) d\bar{\mathbf{x}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_n(\bar{\mathbf{x}}; P_0, \sigma_{s,[0]}^2, \sigma_{s,[1]}^2) \cdot g_n(\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{x}}; \bar{\mathbf{0}}, \sigma_w^2) d\bar{\mathbf{x}} \quad (2.9) \\ &= P_0 \times g_n(\bar{\mathbf{y}}; \bar{\mathbf{0}}, \sigma_0^2) + P_1 \times g_n(\bar{\mathbf{y}}; \bar{\mathbf{0}}, \sigma_1^2) \end{aligned}$$

$$, \sigma_0^2 := \sigma_w^2 + \sigma_{s,[0]}^2, \quad \sigma_1^2 := \sigma_w^2 + \sigma_{s,[1]}^2$$

よって、劣化した観測信号 $\bar{\mathbf{y}}$ は、 n 次元混合型球対称ガウス分布に従う。以降では、表記の簡素化のため、式(2.9)の確率密度関数 $p(\bar{\mathbf{y}})$ を有する n 次元混合型球対称ガウス分布を次式にて簡潔に表記している。

$$\mathcal{GM}_n(\bar{\mathbf{0}}; \sigma_0^2, \sigma_1^2; P_0, P_1) \quad (2.10)$$

$$, 0 \leq P_0 \leq 1, 0 \leq P_1 \leq 1, P_0 + P_1 = 1; 0 < \sigma_0^2 < \sigma_1^2$$

ここで、パラメータ P_0 は、信号の疎性を規定するパラメータである。一方、パラメータ σ_w^2 は、劣化モデルを規定するパラメータである。また、必要に応じて新たに正のパラメータ ρ を導入し、分散 σ_1^2 を、分散 σ_0^2 を用いて次式にて表現する。

$$\sigma_1^2 := (1 + \rho) \cdot \sigma_0^2, \quad \rho > 0 \quad (2.11)$$

3) 大きさ R に関する各種の統計量

確率変数ベクトル $\bar{\mathbf{Y}}$ の大きさ R の確率密度関数 (Radial density function) $h_n(r)$ は、次式で与えられる。

$$h_n(r) = \frac{2r^{n-1}}{\Gamma(n/2)} \left\{ \frac{P_0}{(2\sigma_0^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_0^2}\right) + \frac{P_1}{(2\sigma_1^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_1^2}\right) \right\} \quad (2.12)$$

このとき、大きさ R の k 次モーメント (ただし、 k は 1 以上の整数) $M_k^{(n)}$ は、次式のように評価される。

$$M_k^{(n)} = E[r^k] = \int_0^\infty r^k \cdot h_n(r) dr = 2^{k/2} \lambda_{(n),k} (P_0 \times \sigma_0^k + P_1 \times \sigma_1^k) \quad (2.13)$$

$$, \lambda_{(n),k} = \Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

また、大きさ R の四次モーメント $M_4^{(n)}$ と二次モーメント $M_2^{(n)}$ の二乗の比 $\kappa_R^{(n)}$ は、次式にて評価される。

$$\kappa_R^{(n)} := \frac{M_4^{(n)}}{(M_2^{(n)})^2} = \frac{n+2}{n} \cdot \frac{P_0 \times \sigma_0^4 + P_1 \times \sigma_1^4}{\{P_0 \times \sigma_0^2 + P_1 \times \sigma_1^2\}^2} \quad (2.14)$$

この統計量 $\kappa_R^{(n)}$ は尖度 (Kurtosis) に準じた統計量であり、これを用いて確率密度関数 $h_n(r)$ の裾野の長さが、球対称ガウス分布と比較して相対的に評価される。 n 次元混合型球対称ガウス分布 $\mathcal{GM}_n(\bar{\mathbf{0}}; \sigma_0^2, \sigma_1^2; P_0, P_1)$ の統計量 $\kappa_R^{(n)}$ は、次式の不等式を満足する。

$$\kappa_R^{(n)} = \frac{n+2}{n} \cdot \frac{P_0 \times \sigma_0^4 + P_1 \times \sigma_1^4}{(P_0 \times \sigma_0^2 + P_1 \times \sigma_1^2)^2} \geq \frac{n+2}{n} \quad (2.15)$$

なお、単一の球対称ガウス分布 $\mathcal{G}_n(\bar{\mathbf{0}}, \sigma^2)$ に対しては、このモーメント比 $\kappa_{R, \text{Gauss}}^{(n)}$ は、次式に示すように、

$$\kappa_{R, \text{Gauss}}^{(n)} := \frac{M_4^{(n)}}{(M_2^{(n)})^2} = \frac{\lambda_{(n),4}}{\lambda_{(n),2}^2} = \frac{n+2}{n} \quad (2.16)$$

次元数 n のみに依存した定数となり、式(2.15)の不等式の下限值と一致する。すなわち、 n 次元混合型球対称ガウス分布 $\mathcal{GM}_n(\bar{\mathbf{0}}; \sigma_0^2, \sigma_1^2; P_0, P_1)$ のモーメント比 $\kappa_R^{(n)}$ は、必ず球対称ガウス分布 $\mathcal{G}_n(\bar{\mathbf{0}}, \sigma^2)$ のモーメント比 $\kappa_{R, \text{Gauss}}^{(n)}$ 以上となっており、 n 次元混合型球対称ガウス分布は単一の球対称ガウス分布よりも必ず裾野が長い確率分布となっている。さらに、大きさ R の一次モーメント $M_1^{(n)}$ と二次モーメント $M_2^{(n)}$ の間には、次式の不等式が成立する。

$$(M_1^{(n)})^2 \leq \lambda_{(n),1}^2 M_2^{(n)} / \lambda_{(n),2} \quad (2.17)$$

上式において、等号は、単一の球対称ガウス分布に帰着するとき、すなわち $P_0 = 0$ あるいは $P_0 = 1$ ときに成立する。

2.2.2 観測信号からの統計的信号推定: MMSE ベイズ推定

劣化した観測信号 $\bar{\mathbf{y}}$ が n 次元混合型球対称ガウス分布モデル $\mathcal{GM}_n(\bar{\mathbf{0}}; \sigma_0^2, \sigma_1^2; P_0, P_1)$ に従うとき、観測信号 $\bar{\mathbf{y}}$ の劣化モデル $\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{w}}$ の下で、雑音 $\bar{\mathbf{w}}$ の分散 σ_w^2 が既知であるならば、観測信号 $\bar{\mathbf{y}}$ から原信号 $\bar{\mathbf{x}}$ を統計的に推定する MMSE ベイズ推定関数 (MMSE Bayesian estimate function) は、次式のように求められる。

$$\hat{\bar{\mathbf{x}}}(\bar{\mathbf{y}}) := E[\bar{\mathbf{x}} | \bar{\mathbf{y}}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{x}} p(\bar{\mathbf{x}} | \bar{\mathbf{y}}) d\bar{\mathbf{x}}$$

$$= \sum_{i=0}^1 \frac{c_{1,[i]} \bar{\mathbf{y}}}{1 + c_{2,[i]} \exp(-c_{3,[i]} \|\bar{\mathbf{y}}\|^2)}, \quad (2.18)$$

$$c_{1,[i]} = \frac{\sigma_{s,[i]}^2}{\sigma_i^2} = \frac{\sigma_{s,[i]}^2}{\sigma_w^2 + \sigma_{s,[i]}^2}, \quad c_{2,[i]} = \left\{ \frac{P_0}{P_1} \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \right)^{n/2} \right\}^{2i-1}$$

$$c_{3,[i]} = (-1)^{i+1} \frac{\sigma_1^2 - \sigma_0^2}{2\sigma_0^2 \sigma_1^2}$$

この MMSE ベイズ推定関数の出力ベクトル $\hat{\bar{\mathbf{x}}}(\bar{\mathbf{y}})$ は、入力の観測信号 $\bar{\mathbf{y}}$ と同一の方向を有している。よって、式(2.18)の MMSE ベイズ推定関数は、観測信号 $\bar{\mathbf{y}}$ の大きさ r のみに作用する Shrinkage の意味を有する。こうして、これまで経験的に導入されてきた位相保存型 Shrinkage [5] が解析的に導かれる。

3. 多次元混合型球対称ガウス分布モデルのパラメータ推定: モーメント法

n 次元確率変数ベクトル $\bar{\mathbf{Y}}$ の観測データが n 次元混合型球対称ガウス分布モデル $\mathcal{GM}_n(\bar{\mathbf{0}}; \sigma_0^2, \sigma_1^2; P_0, P_1)$ に従うと見なし、この確率分布モデルのパラメータを統計的に推定する手法を提案する。提案法では、動画像への適用を考慮し、計算が簡易なモーメント法のアプローチを採用している。モーメント法とは、推定対象の確率変数のモーメントが与えられたとき、同一のモーメントを与える確率分布モデルのパラメータを求めるアプローチである。

3.1 モーメント法の問題設定と拘束関係式

提案法では、観測対象の n 次元確率変数ベクトル $\bar{\mathbf{Y}}$ の大きさ $R = \|\bar{\mathbf{Y}}\|$ に関する三種類の統計量、すなわち二次モーメント $\sigma_R^2 := M_2^{(n)}$ 、四次モーメント $\mu_{R,4} := M_4^{(n)}$ 、一次モーメント $a_R := M_1^{(n)}$ が与えられているものと仮定する。このとき、同一の統計量を与える n 次元混合型球対称ガウス分布 $\mathcal{GM}_n(\bar{\mathbf{0}}; \sigma_0^2, \sigma_1^2; P_0, P_1)$ の三つのパラメータ $\{P_1, \sigma_0^2, \sigma_1^2\}$ を決定する。なお、以降では、推定問題及び推定法の表現の簡素化のため、正のパラメータ ρ を用いた式(2.11)の σ_1^2 の表記法を採用し、同一の統計量を与える n 次元混合型球対称ガウス分布の三つのパラメータ $\{P_1, \sigma_0^2, \rho\}$ を決定するパラメータ推定問題として定式化し、推定法を導出している。

提案法では、具体的には、三つの統計量に関する次式の三つの拘束関係式を

$$\begin{cases} \sigma_R^2 = 2\lambda_{(n),2} \cdot (1 + \rho P_1) \cdot \sigma_0^2 & \text{(A)} \\ \mu_{R,4} = 4\lambda_{(n),4} \cdot (1 + 2\rho P_1 + \rho^2 P_1) \cdot \sigma_0^4 & \text{(B)} \\ a_R = \sqrt{2}\lambda_{(n),1} \cdot \{(1 - P_1) + P_1 \sqrt{1 + \rho}\} \cdot \sigma_0 & \text{(C)} \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\lambda_{(n),2} = \frac{n}{2}, \quad \lambda_{(n),4} = \frac{n(n+2)}{4}, \quad \lambda_{(n),1} = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

同時に満足する三つのパラメータ $\{P_1, \sigma_0^2, \rho\}$ を求めている。上式は、パラメータ $\{P_1, \sigma_0^2, \rho\}$ に関する非線形連立方程式であり、これを反復解法で解く。なお、 n 次元混合型球対称ガウス分布モデルは、 n 次元球対称ガウス分布よりも裾野が長い確率分布のみを表現可能であることから、提案法では n 次元球対称ガウス分布よりも裾野の長い n 次元球対称分布のみを推定対象の確率分布として想定している。すなわち、単純な n 次元球対称ガウス分布では、

$$\mu_{R,4} = \lambda_{(n),4} \sigma_R^4 / \lambda_{(n),2}^2 \quad \text{and} \quad a_R^2 = \lambda_{(n),1}^2 \sigma_R^2 / \lambda_{(n),2} \quad (3.2)$$

となるので、以降では、

$$\mu_{R,4} > \lambda_{(n),4} \sigma_R^4 / \lambda_{(n),2}^2 \quad \text{and} \quad a_R^2 < \lambda_{(n),1}^2 \sigma_R^2 / \lambda_{(n),2} \quad (3.3)$$

となる場合のみを推定対象とし、

$$\mu_{R,4} \leq \lambda_{(n),4} \sigma_R^4 / \lambda_{(n),2}^2 \quad \text{or} \quad a_R^2 \geq \lambda_{(n),1}^2 \sigma_R^2 / \lambda_{(n),2} \quad (3.4)$$

となる場合には、推定対象の確率変数は、単純な n 次元球対称ガウス分布に従うと見なすこととした。

3.2 反復的パラメータ推定法

本推定法は、パラメータ σ_0^2 を初期設定し、パラメータ $\{P_1, \sigma_0^2, \rho\}$ を反復更新する推定手法である。この初期設定は、後述するように比較的容易である。また、本推定法は、以下に述べるように、三つの一次方程式を交互に反復的に解くことに帰着する。このように、本推定法は、初期設定の容易性及び求解の計算の簡易性の二点で、変分ベイズ法^{[9], [10]}等の汎用的なパラメータ推定法よりも優れている。

本推定法では、まず、パラメータ σ_0^2 が既知であると仮定し、式(3.1)の(A)と(B)を連立させることで、二つの未知パラメータ ρ と P_1 を求める。ここで、次式で定義される新たなパラメータ θ を導入すると、

$$\theta := \rho \times P_1 > 0 \quad (3.5)$$

式(3.1)の(A)は、 θ に関する次式の一次方程式と見なせる。

$$2\lambda_{(n),2} \cdot (1+\theta) \times \sigma_0^2 = \sigma_R^2 \quad (3.6)$$

このパラメータ θ は正の値であると想定されていることから、 $2\lambda_{(n),2} \sigma_0^2 < \sigma_R^2$ の場合に限り、式(3.6)は次式の有意な解をもつ。

$$\theta = \frac{\sigma_R^2}{2\lambda_{(n),2} \sigma_0^2} - 1 \quad (3.7)$$

さらに、パラメータ σ_0^2 に加えてパラメータ θ が既知であると仮定すると、式(3.1)の(B)は、パラメータ ρ に関する次式の一次方程式と見なせる。

$$\theta \cdot \rho = \frac{\mu_{R,4}}{4\lambda_{(n),4} \sigma_0^4} - 2\theta - 1 \quad (3.8)$$

ここで、球対称ガウス分布よりも裾野の長い分布に対しては、式(3.3)の条件より $\mu_{R,4} > \lambda_{(n),4} \sigma_R^4 / \lambda_{(n),2}^2$ であり、且つ $2\lambda_{(n),2} \sigma_0^2 < \sigma_R^2$ となるようにパラメータ σ_0^2 が設定されているならば、式(3.8)の一次方程式は次式の有意な(すなわち、正の)解 ρ をもつ。

$$\rho = \frac{\frac{\mu_{R,4}}{4\lambda_{(n),4} \sigma_0^4} - 2\theta - 1}{\theta} \quad (3.9)$$

よって、 $\theta = \rho \times P_1$ の関係から、事前分布のパラメータ P_1 が次式にて与えられる。

$$P_1 = \frac{\theta}{\rho} \quad (3.10)$$

また、 $\mu_{R,4} > \lambda_{(n),4} \sigma_R^4 / \lambda_{(n),2}^2$ と $2\lambda_{(n),2} \sigma_0^2 < \sigma_R^2$ の条件下では、式(3.10)の P_1 は必ず $0 < P_1 < 1$ となることが示される。

次に、式(3.1)の(C)において、二つのパラメータ ρ と P_1 が既知であると仮定し、未知パラメータ σ_0 を求める。この仮定の下では、式(3.1)の(C)は、未知パラメータ σ_0 に関する一次方程式であり、直ちに次式の解 σ_0 が得られる。

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda_{(n),1}}} \cdot \frac{a_R}{(1-P_1) + P_1 \sqrt{1+\rho}} \quad (3.11)$$

ここで、式(3.3)に示した条件より $a_R^2 < \lambda_{(n),1}^2 \sigma_R^2 / \lambda_{(n),2}$ と限定されており、また $0 < P_1 < 1$ 且つ $\rho > 0$ であることより明らかに、式(3.11)の解 σ_0 は、明らかに、前述の式(3.9)の解 ρ と式(3.10)の解 P_1 がともに有意な解となるための“ σ_0 に関する条件 $2\lambda_{(n),2} \sigma_0^2 < \sigma_R^2$ ”を満足する。上記より明らかに、式(3.7)、式(3.9)、式(3.10)、式(3.11)を反復的に適用することで、式(3.1)を満足するパラメータ $\{P_1, \sigma_0^2, \rho\}$ が求められる。

パラメータ σ_0 が与えられたとき、式(3.7)、式(3.9)、式(3.10)、式(3.11)の関数を順番に適用することで、パラメータ σ_0 に対する写像 $f(\sigma_0)$ が次式に示すように定義される。

$$f(\sigma_0) \quad \text{on} \quad 0 < \sigma_0 < \sigma_R / \sqrt{2\lambda_{(n),2}} \quad (3.12)$$

$$; \quad \lambda_{(n),2} = \frac{n}{2}, \quad \lambda_{(n),4} = \frac{n(n+2)}{4}, \quad \lambda_{(n),1} = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$(1) \quad \theta = \frac{\sigma_R^2}{2\lambda_{(n),2} \sigma_0^2} - 1$$

$$(2) \quad \rho = \frac{\frac{\mu_{R,4}}{4\lambda_{(n),4} \sigma_0^4} - 2\theta - 1}{\theta}$$

$$(3) \quad P_1 = \frac{\theta}{\rho}$$

$$(4) \quad f = \frac{1}{\sqrt{2\lambda_{(n),1}}} \cdot \frac{a_R}{(1-P_1) + P_1 \sqrt{1+\rho}}$$

この写像 $f(\sigma_0)$ の次式で定義された不動点 σ_0^* が、

$$\sigma_0^* = f(\sigma_0^*) \quad (3.13)$$

パラメータ σ_0 の推定値 σ_0^* を与える。また、この不動点 σ_0^* は、下記の方程式の解と一致する。

$$g(x) = f(x) - x = 0 \quad (3.14)$$

本推定法は、この方程式を Steffensen の反復解法^[11]で解く方法である。

以下に、方程式 $x = f(x)$ に対する Steffensen の反復解法を示した。

[Steffensen の反復解法]

$$0) \text{ 初期設定: } x^{(0)} = x^\#, \quad n = 0 \quad (3.15)$$

1) $x^{(n)}$ の反復更新:

$$z_0 = x^{(n)}, \quad z_1 = f(z_0), \quad z_2 = f(z_1) \quad (3.16)$$

$$x^{(n+1)} = \varphi(x^{(n)}) := x^{(n)} - \frac{(z_1 - z_0)^2}{z_2 - 2z_1 + z_0} \quad (3.17)$$

2) $n \leftarrow n+1$ とし、1)へ戻る。

[反復解法終]

Steffensen の反復解法は、非線形方程式の最も一般的な反復解法である Newton 法を離散近似した反復解法に相当している。また、Steffensen の反復解法は、初期設定値 $x^\#$ によっては、収束しないことがある。よって、適切な初期設

定が必須である。本推定法の初期設定は、比較的容易であり、パラメータ σ_0 の初期値を、次式の不等式を満足し、

$$\sigma_0 < \sigma_R / \sqrt{2\lambda_{(n),2}} \quad (3.18)$$

その上界 $\sigma_R / \sqrt{2\lambda_{(n),2}}$ に近い値に設定すれば、収束する。

3.3 多次元球対称ガウス分布に従う確率変数ベクトルを対象とした際のパラメータの多義性

n 次元確率変数ベクトル $\bar{\mathbf{Y}}$ が平均 $\bar{\mathbf{0}}$ の単純な n 次元球対称ガウス分布に従う場合、 n 次元確率変数ベクトル $\bar{\mathbf{Y}}$ の大きさ $R = \|\bar{\mathbf{Y}}\|$ の二次モーメント $\sigma_R^2 := M_2^{(n)}$ 、四次モーメント $\mu_{R,4} := M_4^{(n)}$ 、一次モーメント $a_R := M_1^{(n)}$ の間には、次式の関係が成り立つ。

$$\mu_{R,4} = \frac{n+2}{n} \times \sigma_R^4, \quad a_R = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}} \cdot \sigma_R \quad (3.19)$$

これを n 次元混合型球対称ガウス確率分布モデルとして記述する際、以下の二通りの解釈が考えられる。

〔解釈 I〕

$$P_1 = 0, \quad \rho \in (0, \infty), \quad \sigma_0^2 = \frac{\sigma_R^2}{2\lambda_{(n),2}}, \quad \sigma_1^2 = (1+\rho) \cdot \sigma_0^2 \quad (3.20)$$

この解釈では、分散 σ_1^2 は、式(3.20)を満足する任意の正値をとらうる。

〔解釈 II〕

$$P_1 = 1, \quad \rho \in (0, \infty), \quad \sigma_1^2 = \frac{\sigma_R^2}{2\lambda_{(n),2}}, \quad \sigma_0^2 = \frac{\sigma_1^2}{1+\rho} \quad (3.21)$$

この解釈では、分散 σ_0^2 は、式(3.21)を満足する任意の正値をとらうる。

4. 二次元球対称一般化ガウス分布の二次元混合型球対称ガウス分布モデルへの当て嵌め

一般化ガウス分布は、静止画像や音響信号の変換係数の統計的モデリングに有用かつ標準的な確率分布として、これまで信号復元、画像復元、応用統計学等の科学技術分野で盛んに研究されてきた。ここでは、一般化ガウス分布を球対称化した多次元確率分布である“多次元球対称一般化ガウス分布”をモデリング対象の確率分布として取り上げている。

実部と虚部を有した DFT 係数の確率分布モデルには、二次元球対称分布が適していると予想されることから、本研究では、とくに二次元球対称一般化ガウス分布に焦点を当て、二次元球対称一般化ガウス分布に従う二次元確率変数ベクトルの大きさに関する統計量に 3.2 節で述べたパラメータ推定法を適用し、二次元球対称一般化ガウス分布に二次元混合型球対称ガウス分布モデルを当て嵌めている。すなわち、二次元球対称一般化ガウス分布に従う二次元確率変数ベクトルの大きさに関する三つの統計量、すなわち二次モーメント $\sigma_R^2 := M_2^{(n)}$ 、四次モーメント $\mu_{R,4} := M_4^{(n)}$ 、一次モーメント $a_R := M_1^{(n)}$ に、3.2 節で述べたパラメータ推定法を適用し、適合する二次元混合型球対称ガウス分布モデルの三つのパラメータ $\{P_1, \sigma_0^2, \rho\}$ を求め、二次元球対称一般化ガウス分布に二次元混合型球対称ガウス分布モデルを当て嵌めている。元の二次元球対称一般化ガウス分布で

は観測データの劣化モデルや信号の疎性は何ら想定されていないが、二次元混合型球対称ガウス分布モデルへの当て嵌めを通して観測データの劣化モデルと信号の疎性とに関連付けられ、合わせて劣化した観測データから真のデータを推定する位相保存型 Shrinkage 関数が二次元混合型球対称ガウス分布モデルの MMSE ベイズ推定関数として構成される。以下では、これらのことを具体的に示している。

4.1 モーメントの真値を用いた場合の当て嵌め

平均 $\bar{\mathbf{0}}$ の二次元球対称一般化ガウス分布 $\mathcal{GG}_2(\bar{\mathbf{0}}, \alpha, \beta)$ において、形状パラメータ β を $0 < \beta < 1$ の範囲内の数値に設定し、またこの分布に従う確率変数ベクトル $\bar{\mathbf{Y}}$ の大きさ R の二次モーメント σ_R^2 が次元数 $n = 2$ に等しく $\sigma_R^2 = 2$ となるようにスケールパラメータ α の値を設定し、さらに二次元球対称一般化ガウス分布 $\mathcal{GG}_2(\bar{\mathbf{0}}, \alpha, \beta)$ の大きさ R に関する三つの統計量、すなわち二次モーメント σ_R^2 、四次モーメント $\mu_{R,4}$ 、一次モーメント a_R の真値に、3.2 節で述べたパラメータ推定法を適用し、適合する二次元混合型球対称ガウス分布モデルの三つのパラメータ $\{P_1, \sigma_0^2, \rho\}$ を求め、二次元球対称一般化ガウス分布を二次元混合型球対称ガウス分布モデルへと当て嵌めた。

4.1.1 本パラメータ推定法の収束特性

図 2 には、形状パラメータ β の値を $\beta = 0.5$ と設定した場合について、本パラメータ推定法の写像 $f(\sigma_0)$ を σ_0 の関数として図示した。

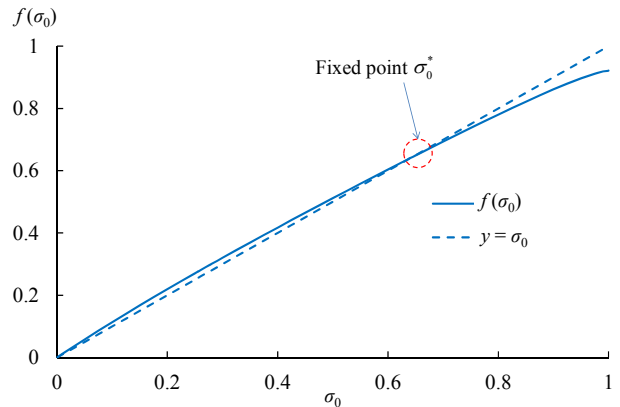


図 2 4.1 節の当て嵌め問題において形状パラメータ $\beta = 0.5$ と設定した際の本推定法における写像 $f(\sigma_0)$ のグラフ

図 2 に示したように、本パラメータ推定法の写像 $f(\sigma_0)$ は、 $0 < \sigma_0 < 1 = \sigma_R / \sqrt{2\lambda_{(2),2}}$ の関数の変域内において、上に凸で、且つ原点を通る傾き 1 の直線 (図 2 中の点線) と唯一つの交点を有しているため、 $(0, 1)$ の変域内の任意の初期値から出発し、単純な反復更新法を適用することで、写像 $f(\sigma_0)$ の不動点 σ_0^* へと必ず収束する。しかしながら、単純な反復更新法の収束は非常に遅い。そこで、本パラメータ推定法では、より速い収束を達成しうる Steffensen の反復解法を採用している。

図 3 には、図 2 に示した写像 $f(\sigma_0)$ に基づき式(3.14)にて定義された関数 $g(\sigma_0)$ のグラフを図示した。本パラメータ推定法は、Newton 法の離散近似に相当した Steffensen の反復解法で方程式 $g(\sigma_0) = 0$ の解を求めることを通し、写像 $f(\sigma_0)$ の不動点 σ_0^* を求めるものである。図 3 の関数 $g(\sigma_0)$ のグラフより明らかに、パラメータ σ_0 の初期値 $\sigma^\#$ を関数

$g(\sigma_0)$ の極大点の右側に設定した場合に限り、Newton 法では、その反復更新によって方程式 $g(\sigma_0)=0$ の解 σ_0^* に収束する。

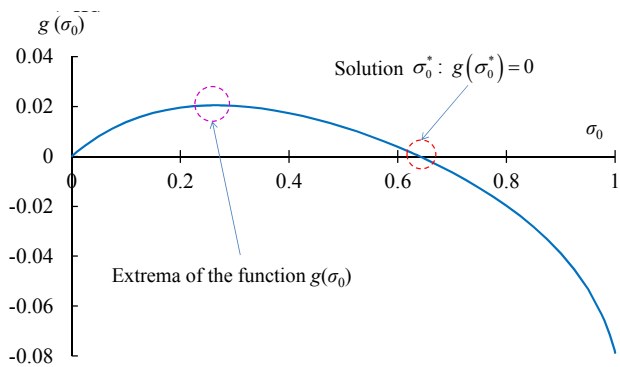


図 3 4.1 節の当て嵌め問題において形状パラメータ $\beta = 0.5$ と設定した際の本推定法における関数 $g(\sigma_0)$ のグラフ

図 4 には、Steffensen の反復解法を図 2 に図示した写像 $f(\sigma_0)$ の不動点問題に適用した場合について、式(3.17)で定義された Steffensen の反復更新写像 $\varphi(\sigma_0)$ を σ_0 の関数として図示した。図 4 において、反復更新写像 $\varphi(\sigma_0)$ の入力変数 σ_0 の値が桃色にハッチングされた区間内 ($0.35 \leq \sigma_0^{\#} < 1$) に設定されているならば、反復更新写像 $\varphi(\sigma_0)$ の出力は、 σ_0 の初期値 $\sigma_0^{\#}$ の許容範囲(0, 1)に収まっている。よって、 $0.35 \leq \sigma_0^{\#} < 1$ の区間内に σ_0 の初期値 $\sigma_0^{\#}$ を設定すれば、Steffensen の反復解法によって写像 $f(\sigma_0)$ の不動点 σ_0^* が求められる。

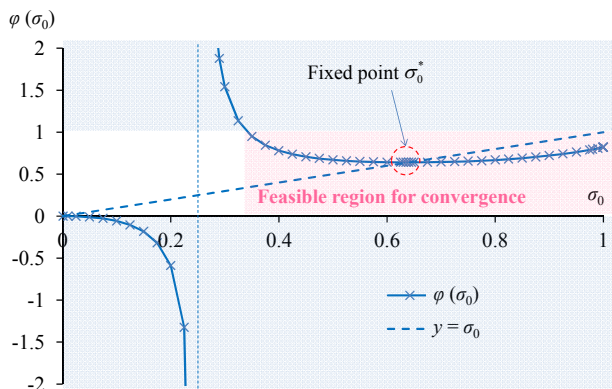


図 4 4.1 節の当て嵌め問題において形状パラメータ $\beta = 0.5$ と設定した際の本推定法における Steffensen の反復解法の反復更新写像 $\varphi(\sigma_0)$ のグラフ

図 5 には、図 2 に図示した写像 $f(\sigma_0)$ の不動点問題に Steffensen の反復解法を適用した際の収束特性を、パラメータ σ_0 の初期値 $\sigma_0^{\#}$ を種々の値に設定した場合について比較して示した。図 5 では、 σ_0 の初期値 $\sigma_0^{\#}$ の許容範囲は (0, 1) の開区間であるが、 $0.35 \leq \sigma_0^{\#} < 1$ の区間内に σ_0 の初期値 $\sigma_0^{\#}$ を設定したとき、高々 3 ~ 4 回程度の反復更新で、写像 $f(\sigma_0)$ の不動点 σ_0^* に収束している。

本節の当て嵌め問題では、形状パラメータ β の値に応じ、Steffensen の反復解法が収束するための“パラメータ σ_0 の初期値 $\sigma_0^{\#}$ の適切な設定範囲”が異なる。形状パラメータ β の値を $\beta \rightarrow 1$ とすると、初期値 $\sigma_0^{\#}$ の適切な設定範囲は、その上界は 1.0 で変化しないが、その下界はやや大きくなり、適切な設定範囲は次第に狭くなる。一方、形状パラメ

ータ β の値を $\beta \rightarrow 0_+$ とすると、初期値 $\sigma_0^{\#}$ の適切な設定範囲は、その上界は 1.0 で変化しないが、その下界はやや小さくなり、適切な設定範囲は次第に広がる。このように、本節の当て嵌め問題では、形状パラメータ β の値が $0 < \beta < 1$ の範囲内であるならば、初期値 $\sigma_0^{\#}$ の適切な設定範囲は、必ず $0 < \sigma_0^{\#} \leq \sigma_0^* < 1$ の区間 (ただし、 σ_0^* は形状パラメータ β の値によって決まる $0 < \sigma_0^* < 1$ の区間内の正の定数) となる。よって、本節の当て嵌め問題では、パラメータ σ_0 の初期値 $\sigma_0^{\#}$ を、式(3.18)の不等式の上界 $\sigma_R / \sqrt{2\lambda_{(n),2}}$ (図 2 ~ 図 5 では、この上界の値は 1.0 である) よりも若干小さな値に設定すれば、Steffensen の反復解法によって写像 $f(\sigma_0)$ の不動点 σ_0^* が必ず求められる。

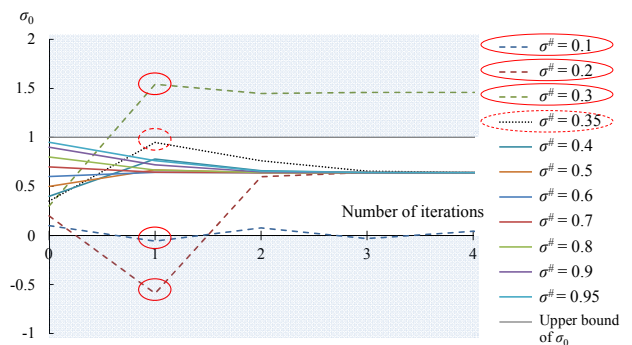


図 5 4.1 節の当て嵌め問題において形状パラメータ $\beta = 0.5$ と設定した際の本パラメータ推定法における Steffensen の反復解法の収束特性

4.1.2 当て嵌めの結果

図 6 ~ 図 8 には、当て嵌めによって得られた二次元混合型球対称ガウス分布モデルの三つのパラメータ $\{P_1, \sigma_0^2, \rho\}$ が、二次元球対称一般化ガウス分布 $\mathcal{GG}_2(\vec{0}, \alpha, \beta)$ の形状パラメータ β の値に応じて変化する様子を図示した。図 6 ~ 図 8 において、 $\beta \rightarrow 1$ のとき、3.3 節で述べた解釈 II において $\rho = 0.67$ とした解に漸近した。すなわち、次式に示した解に漸近した。

$$P_0 = 0, P_1 = 1; \rho = 0.67; \sigma_1^2 = 1, \sigma_0^2 = \frac{1}{1+\rho} \approx 0.599 \quad (4.1)$$

また、図 6 において形状パラメータ β の値を $\beta \rightarrow 0_+$ とすると、パラメータ P_1 は単調に減少し、0 に漸近する。一方、パラメータ ρ は単調に増加し、非常に大きな値となる。このことは、以下のように説明される。すなわち、形状パラメータ β の値が小さい場合、確率分布は裾野の長い分布となるが、このとき“有意な信号は付加雑音に比較して十分に大きな分散を有している (SN 比が高い) が、それが発生することは極めて稀である”という解釈が採用されている。

次に、形状パラメータ β の値を $0 < \beta < 1$ の範囲内の値に設定した平均 $\vec{0}$ の二次元球対称一般化ガウス分布 $\mathcal{GG}_2(\vec{0}, \alpha, \beta)$ に対し、二次元混合型球対称ガウス分布モデルへの当て嵌めを通し、さらに簡単のため次式を仮定して

$$\sigma_0^2 = \sigma_w^2; \sigma_{s,[0]}^2 = 0; \sigma_1^2 = \sigma_w^2 + \sigma_{s,[1]}^2 = \sigma_0^2 + \sigma_{s,[1]}^2 \quad (4.2)$$

式(2.18)の MMSE ベイズ推定関数 $\hat{\vec{x}}(\vec{y})$ を構成した。図 9 には、形状パラメータ β の種々の値について、構成された MMSE ベイズ推定関数 $\hat{\vec{x}}(\vec{y})$ のノルム $\|\hat{\vec{x}}(\vec{y})\|$ を入力の二次元観測ベクトル \vec{y} のノルム $\|\vec{y}\|$ の関数として図示した。ただし、図 9 に示した MMSE ベイズ推定関数は、二次モーメント $\sigma_R^2 := M_2^{(2)}$ が次元数 $n = 2$ に等しくなるように、すな

わち $\sigma_r^2=2$ となるようにスケールパラメータ α の値を設定した場合の結果である。なお、形状パラメータ β の値を $\beta \rightarrow 1_-$ とすると、二次元混合型球対称ガウス分布モデルのパラメータ推定結果は、先に示したように式(4.1)の解に漸近した。この収束解に対応し、式(2.18)の MMSE ベイズ推定関数の係数 $\{c_{1,[0]}, c_{1,[1]}, c_{2,[1]}, c_{3,[1]}\}$ は、次式で与えられる。

$$c_{1,[0]}=0, c_{1,[1]}=\frac{\sigma_{s,[1]}^2}{\sigma_1^2}=\frac{\rho}{1+\rho} \approx 0.401, c_{2,[1]}=\frac{P_0}{P_1}\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\right)=0 \quad (4.3)$$

$$c_{3,[1]}=\frac{\sigma_1^2-\sigma_0^2}{2\sigma_0^2\sigma_1^2}=\frac{1}{2\sigma_0^2}\frac{\rho}{1+\rho} \approx \frac{0.200}{\sigma_0^2}$$

結局、 $\beta \rightarrow 1_-$ のときの MMSE ベイズ推定関数は、次式の線形関数に漸近する。

$$\hat{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{y}})=E[\mathbf{x}|\bar{\mathbf{y}}]=\frac{c_{1,[1]}\bar{\mathbf{y}}}{1+c_{3,[1]}\|\bar{\mathbf{y}}\|^2} \approx 0.401 \times \bar{\mathbf{y}} \quad (4.4)$$

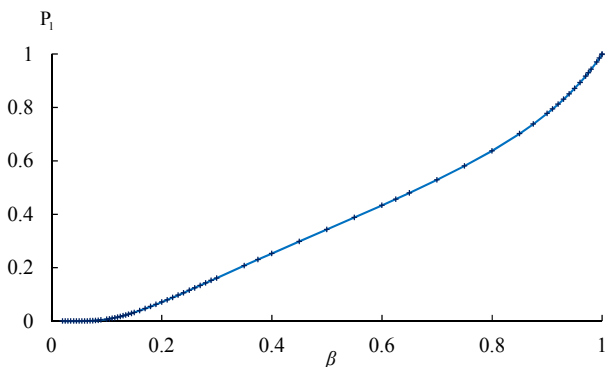


図 6 二次元球対称一般化ガウス分布 $\mathcal{GG}_2(\bar{\mathbf{0}}, \alpha, \beta)$ の形状パラメータ β の値を変えた際のパラメータ P_1 の推定値の変化

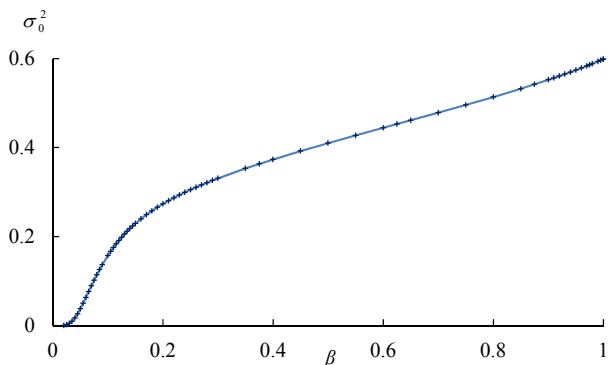


図 7 二次元球対称一般化ガウス分布 $\mathcal{GG}_2(\bar{\mathbf{0}}, \alpha, \beta)$ の形状パラメータ β の値を変えた際のパラメータ σ_0^2 の推定値の変化

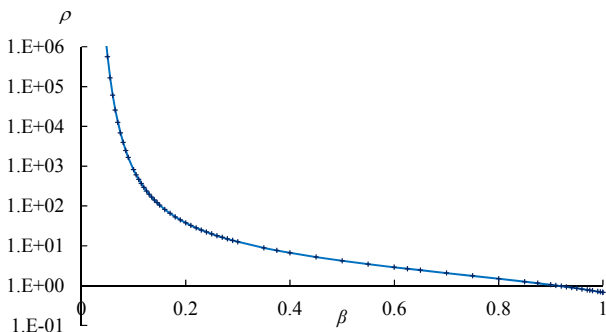


図 8 二次元球対称一般化ガウス分布 $\mathcal{GG}_2(\bar{\mathbf{0}}, \alpha, \beta)$ の形状パラメータ β の値を変えた際のパラメータ ρ の推定値の変化

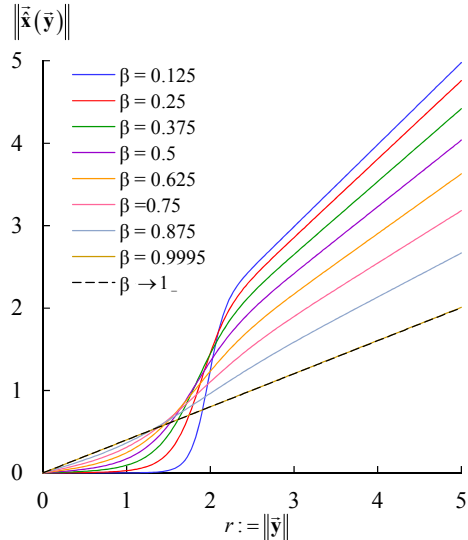


図 9 形状パラメータ β の二次元球対称一般化ガウス分布 $\mathcal{GG}_2(\bar{\mathbf{0}}, \alpha, \beta)$ の二次元混合型球対称ガウス分布モデルへの当て嵌めを通して構成された MMSE ベイズ推定関数 $\hat{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{y}})$ のノルム $\|\hat{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{y}})\|$ のグラフ

4.2 サンプルモーメントを用いた場合の当て嵌め

4.1 節とは異なり、モーメントの真値の代わりに、平均 $\bar{\mathbf{0}}$ の二次元球対称一般化ガウス分布 $\mathcal{GG}_2(\bar{\mathbf{0}}, \alpha, \beta)$ に従う確率変数ベクトル $\bar{\mathbf{Y}}$ の観測サンプル系列から求めたサンプルモーメントに 3.2 節で述べたパラメータ推定法を適用し、適合する二次元混合型球対称ガウス分布モデルの三つのパラメータ $\{P_1, \sigma_0^2, \rho\}$ を求め、二次元球対称一般化ガウス分布を二次元混合型球対称ガウス分布モデルへ当て嵌めた。

実際の観測サンプル系列を用いた場合も、4.1 節で述べた当て嵌め結果とほぼ同一の当て嵌め結果が得られた。ただし、形状パラメータ β の値が 1 よりも僅かに小さな値の場合には、本推定法の振舞いに不規則な変動が見られた。これは、先に 3.2 節で述べたように、本推定法は、推定対象として、単一の球対称ガウス分布 $\mathcal{G}_n(\bar{\mathbf{0}}, \sigma^2)$ のモーメント比 $\kappa_{R, \text{Gauss}}^{(n)}$ よりも大きなモーメント比 $\kappa_R^{(n)}$ を有する確率分布のみを想定しており、この条件が満たされない場合に正常に動作するようには設計されておらず、形状パラメータ β の値が 1 よりも僅かに小さな値の場合には、観測サンプル系列から求めたモーメント比 $\kappa_R^{(n)}$ が $\kappa_{R, \text{Gauss}}^{(n)}$ 以下となる事象が確率的に生じうるためである。観測サンプル系列から求めたモーメント比 $\kappa_R^{(n)}$ が $\kappa_{R, \text{Gauss}}^{(n)}$ と非常に近い値となった場合には、単一の球対称ガウス分布と見なし、本推定法を適用せずに、式(4.1)～式(4.3)の結果を代用することで、この問題を回避することができる。

また、形状パラメータ β の値が 0 に近い小さな正の値の場合には、三つのモデルパラメータ $\{P_1, \sigma_0^2, \rho\}$ の各パラメータの推定値の推定分散が比較的大きな値となった。これは、図 8 から推察されるように、形状パラメータ β の値を $\beta \rightarrow 0_+$ とすると、パラメータ ρ の推定値が急激に増大するが、観測サンプル系列から求めたサンプルモーメントは観測毎に変動するので、この変動の影響が、形状パラメータ β の値が 0 に近い小さな正の値の場合には、増幅されるためである。この推定分散の増大を抑制するには、十分長い観測サンプル系列を使用する必要がある。

5. 劣化モデルと信号の疎性を陽に含んだ観測信号の統計的モデリングの意義と効用

本研究の“観測信号の多次元混合型球対称ガウス分布モデリング”は、“劣化モデルと信号の疎性を陽に含んだ観測信号のベイズ統計的なモデリング”の意義を有している。ベイズ推定では、事前分布とそのパラメータ（ハイパーパラメータとも言う）の設定が成功への鍵を握っている。式(2.8)の事前確率分布モデルでは、 $\{P_1, \sigma_{s,[0]}^2, \sigma_{s,[1]}^2\}$ がハイパーパラメータに相当している。一般的に言って、事前分布のハイパーパラメータを適切に設定するための合理的基準が必ず存在するとは言えず、それ故に伝統的な統計学では、ベイズ推定は長い間“鬼子”として扱われてきた。一方、本研究の統計的モデリングでは、事前分布のハイパーパラメータは、疎表現^[12]の観点から明確な意味を有しており、観測サンプル系列から推定可能である。また、本パラメータ推定法は、観測サンプル系列から求めたサンプルモーメントのみに基づいて推定を行い、観測サンプル系列自体を保持しておく必要がなく、推定処理は極めて簡易である。

動画像復元において、動画像中の時空間的小区毎に、交流 DFT 係数に本パラメータ推定法を適用することで、多次元混合型球対称ガウス分布モデルへの当て嵌めを通して MMSE ベイズ推定の観点から最適な MMSE ベイズ推定関数として位相保存型 Shrinkage を時空間適応的に構成することができる。その際、MMSE ベイズ推定関数を求めるには、式(2.8)の事前確率分布モデルのハイパーパラメータ $\{P_1, \sigma_{s,[0]}^2, \sigma_{s,[1]}^2\}$ を指定する必要がある。しかしながら、当て嵌められた多次元混合型球対称ガウス分布モデルのパラメータ $\{P_1, \sigma_0^2, \rho\}$ からハイパーパラメータ $\{P_1, \sigma_{s,[0]}^2, \sigma_{s,[1]}^2\}$ を一意的に決定することはできない。一方、分散パラメータ間には、次式の関係が成立しているので、

$$\sigma_0^2 = \sigma_w^2 + \sigma_{s,[0]}^2, \quad \sigma_1^2 = (1 + \rho)\sigma_0^2 = \sigma_w^2 + \sigma_{s,[1]}^2 \quad (5.1)$$

雑音の分散 σ_w^2 の推定値を上式に代入することで、すべてのハイパーパラメータを指定することができる。これまで、入力画像に混入した雑音の分散を推定するため、定評のある多くの手法が開発されており^[13]、これらの手法を適用することで、雑音分散 σ_w^2 の推定値が容易に求められる。

本研究の統計的モデリングは、信号復元や画像復元の技術分野のみならず、“生物の視覚の経験に基づく発現機構”を取り扱う現代の神経科学分野においてもその基礎的側面の前進に役立つものである。神経科学分野では、感覚に関わる神経細胞は、その発達段階を通して、それらに入力される感覚信号の統計的性質に巧く適合するようにその応答を変化させ、感覚を生み出す脳内過程が徐々に形成されていくと仮定されてきた。1950 年代末から 70 年代にかけて D. H. Hubel と T. N. Wiesel によって行われた“子猫の一次視覚野に関する有名な視覚環境制御の実験”は、視覚の発達が生後の視覚的経験に依存して大きく非可逆的に変容することを明らかにしたものであった^[14]。また、1950 年代から、情報理論の符号化効率の概念に基づき、周囲環境と関連した入力感覚信号の統計的性質と感覚に関わる神経細胞の応答との関係を実験的に解明する試みがなされてきた^[15]。さらに、近年、大規模データの全数活用が現実のものとなり、種々な複雑な確率分布を大規模データから直接求めることができることから、視覚に関する神経科学的研究において高度な統計的モデリングが採用されつつある^[15]。これと並行し、現在の神経科学分野では、『脳内の感覚信

号表現が疎表現であるとする』作業仮説が支配的となっている^[12]。入力された感覚信号から疎表現を生み出す過程は、生物の生存にとって“有意な情報”を抽出する過程を意味しており、この脳内過程の発現が生後の感覚的経験の総体、すなわちその統計的性質に依存している。また、入力された感覚信号には必ず歪が伴うことから、本研究の“劣化モデルと信号の疎性を陽に含んだ観測信号のベイズ統計的モデリング”が、“生物の視覚の経験に基づく発現機構の解明”のための必須の道具立てを提供するものと期待される。例えば、人間の視覚システムでは、その視感度が時空間周波数によって異なるが、このような特性を有した視覚の発現機構を、視覚的経験のベイズ統計的モデリングの観点から説明することが可能になるものと期待される。

6. おわりに

3-D DFT の動画像復元への応用を想定し、劣化モデルと信号の疎性を陽に含んだ観測 DFT 係数のベイズ統計的モデリングの一手法を提案し、この手法によってモデルパラメータが安定に推定されることを示した。また、本統計的モデリング手法の意義と効用について、信号・画像処理工学、及び神経科学の観点から議論した。

参考文献

- [1] 小松 隆, 張 建, 齊藤 隆弘, “三次元冗長 DCT と三次元 ST-DFT の動画像復元性能比較”, 映像メディア処理シンポジウム (IMSP2016), P-3-10 (2016).
- [2] K. Dabov, A. Foi, K. Egiazarian, “Video denoising by sparse 3D transform-domain collaborative filtering”, Proc. 15th European Signal Process. Conf. (EUSIPCO 2007), pp.145-149 (2007).
- [3] T. Komatsu, K. Tyon, T. Saito, “3-D mean-separation-type short-time DFT with its application to moving-image denoising”, 2017 IEEE Int. Conf. on Image Processing (ICIP 2016) (2016) (Accepted).
- [4] A. Boisbunon, “The class of multivariate spherically symmetric distributions,” Université de Rouen, Technical Report, #2012-005 (2012).
- [5] P. Kovsi, “Phase preserving denoising of images”, Proc. Fifth International/National Biennial Conference on Digital Image Computing, Techniques & Applications (DICTA 99), pp.212-217, (1999).
- [6] 小針 力, 小松 隆, 齊藤 隆弘, “混合ガウス分布モデルに基づく適応的 Shrinkage を用いたカラー画像雑音除去”, 電子情報通信学会論文誌, vol. J96-D, no.9, pp.1989-1992 (2013).
- [7] S. Mallat, “A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation”, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., vol.11, no.7, pp.674-793 (1989).
- [8] M. Antonini, M. Barlaud, P. Mathieu, I. Daubechies, “Image coding using wavelet transform”, IEEE Trans. Image Process., vol.1, no.2, pp.205-220 (1992).
- [9] H. Attias, “Learning parameters and structures of latent variable models by variational Bayes”, Proc. Uncertainty in Artificial Intelligence (1999).
- [10] 上田 修功, “ベイズ学習 [IV] - 変分ベイズ学習の応用例 -, 電子情報通信学会誌, vol.85, no.8, pp.633-638 (2002).
- [11] J. F. Steffensen, “Remarks on iteration”, Skand. Aktuar Tidsskr. vol.16, pp.64-72 (1933).
- [12] B. A. Olshausen, D. J. Field, “Sparse coding with an overcomplete basis set: A strategy employed by V1?”, Vis. Res., vol.37, no.23, pp.3311-3325 (1997).
- [13] D. Donoho, I. Johnstone, “Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage,” Biometrika, vol.81, no.3, pp.425-455 (1994)
- [14] D. H. Hubel, T. N. Wiesel, “Receptive fields of single neurones in the cat’s striate cortex”, J. Physiol., vol.148, pp.574-591 (1959)
- [15] E. P. Simoncelli, B. A. Olshausen, “Natural image statistics and neural representation,” Annu. Rev. Neurosci., vol.24, pp.1193-1216 (2001).