CF-004

確率的な提携構造形成フレームワークの提案
Framework for Probabilistic Coalition Structure Generation

沖本 天太 * Tenda Okimoto　**平山 勝敏** * Katsutoshi Hirayama　**シュウィンド ニコラ** † Nicolas Schwind
井上 克巳 ‡ Katsumi Inoue　**マーキス ピエール** § Pierre Marquis

1. 序論

協力ゲーム理論とは，利己的に行動する主体（エージェント）間で拘束力のある合意が可能な場合のエージェントの振る舞いに関する理論である．提携構造形成 (Coalition Structure Generation, **CSG**) [1, 9, 10] 問題とは，協力ゲーム理論における基本的な枠組みの一つであり，あるエージェントの集合を社会的余剰，すなわち，すべての提携における利得の総和が最大化されるように，いくつかの提携に分割する問題である．この問題は **NP**-完全な問題として知られている完全集合分割問題 [12] と等価な問題であり，代表的な応用例として，無人偵察機オペレーション [5]，分散経路決定問題 [10]，マルチセンサネットワーク [3]，ロボカップレスキュー [7] 等が挙げられる．**CSG** 問題は，エージェントの集合及び，特性関数と呼ばれるブラックボックス関数により定義される．エージェントの部分集合は提携，その分割は提携構造と呼ばれる．各提携における利得は特性関数により与えられ，提携構造の利得は，すべての提携における利得の総和により求められる．

CSG 問題は，一般に，**NP**-完全な問題として知られているが，**CSG** 問題における特性関数が優加法性を満たすとき，すなわち，$C_i \cap C_j = \emptyset$ を満たす任意の提携の組 C_i 及び C_j に関して，C_i と C_j における利得の総和が $C_i \cup C_j$ における利得以下となるとき，すべてのエージェントからなる提携（全体提携）が必ず最適な提携構造となる．このとき，**CSG** 問題は多項式時間内に求解可能となる．同様に，特性関数が劣加法性を満たすとき，すなわち，$C_i \cap C_j = \emptyset$ を満たす任意の提携の組 C_i 及び C_j に関して，C_i と C_j における利得の総和が $C_i \cup C_j$ における利得以上となるとき，単独提携からなる提携構造が最適な提携構造となり，このときも，**CSG** 問題は多項式時間内に求解可能となる．

実世界におけるエージェントの振る舞いは不確実な要素を多く含んでいる．例えば，ある提携への参加を希望しているがスケジュールの都合上，参加の有無が事前には分からないエージェント等，実問題を考えた場合，提携成立の能否を考えることは重要である．既存研究において，不確実なエージェントの振る舞いに着目した研究は少なく，提携への参加の有無が確率で与えられている **CSG** 問題に関する研究はほとんどない．

本論文では，各エージェントの提携への参加の有無が確率により与えられている確率的な **CSG** 問題のフレームワーク (Probabilistic Coalition Structure Generation, **PCSG**) を定式化し，**PCSG** に関する最適化問題を定義する．具体的には，従来の **CSG** 問題に対して，各エージェントの提携への参加の有無を確率で返す関数を追加することにより **PCSG** のフレームワークを定義する．**PCSG** 問題では，各提携で得られる利得の期待値を計算し，すべての提携における利得の期待値の総和が最大化されるような提携構造を求める．

PCSG 問題では，各提携で得られる利得の期待値の計算方法が重要となる．本論文では 2 つの計算方法を定義する．まず，ある提携における利得の期待値は，すべての構成員が参加したときのみに与えられるものとする計算方法（期待値計算法 1 と呼ぶ）を示す．次に，すべてのシナリオ，すなわち，欠席者の全組合せを想定した計算方法（期待値計算法 2 と呼ぶ）を示す．

さらに，**PCSG** 問題に関する以下の性質について議論する．(i) **PCSG** 問題において，期待値計算法 1 を適用した場合は，特性関数が優加法性を満たしても，全体提携が必ずしも最適な提携構造になるとは限らない．このことは，**CSG** 問題では，特性関数が優加法性を満たすとき，与えられた問題を解くことなしに，最適な提携構造が求解可能となるが，**PCSG** 問題では，特性関数が優加法性を満たしたとしても，元の問題を解く必要があることを意味している．(ii) 特性関数が劣加法性を満たすときは，**CSG** 問題のときと同様に，単独提携からなる提携構造が最適となる．次に，**PCSG** 問題において，期待値計算法 2 を適用した場合，**CSG** 問題のときと同様に，(iii) 特性関数が優加法性を満たすときは全体提携が最適となり，(iv) 劣加法性を満たすときは単独提携からなる提携構造が最適となる．

以下，**PCSG** 問題の応用例を示す．例えば，文献 [13] に示されている火災現場における救助グループ形成に関する **CSG** 問題を考える．この問題では，複数の救助ロボットが存在し，各ロボットは医療行為，消火活動，輸送車の運転などの異なるスキルをもつものとする．このとき，可能な限り多くの救助グループを形成したいが，同時に，どのグループも救助に必要なスキルを持つエージェントで構成する必要がある．よって，同じスキルを持つロボットを同じグループに分けるといったグループ分け（提携構造）は望ましくない．この問題は **CSG** 問題として定式化可能であるが，ここで，いくつかのロボットはロボットステーションで充電中，または，メンテナンス中で，どのロボットが出動可能か不確かな状態にあるものとする．このとき，この問

*神戸大学大学院海事科学研究科
†産業技術総合研究所
‡国立情報学研究所/東京工業大学
§CRIL-CNRS/Artois University

題は **PCSG** 問題として表現可能である．その他にも，手術室における医療スタッフチームを形成する問題や，文献 [10] に示されている分散経路決定問題が **CSG** 問題として定式化可能であり，前者の例では，医療スタッフのスケジュール等により手術チームへの参加が不確かな状況，後者の例では，運転手のスケジュール等による配送運行が不確かな状況を考慮した場合，これらの **CSG** 問題は **PCSG** 問題として表現可能となる．

本論文では，序論と結言を含めて全体を 5 章で構成している．次章では，提携構造形成に関するフレー ムワークを紹介する．3 章では，提携構造形成において，各エージェントの任意の提携への参加の有無が確率により与えられている，確率的な提携構造形成に関するフレームワークを定義する．4 章では，関連研究について，5 章では，結言と今後の課題について述べる．

2. 提携構造形成問題

本章では，提携構造形成 (Coalition Structure Generation, **CSG**) [1, 9, 10] 問題のフレームワーク及び，**CSG** に関する最適化問題を紹介する．さらに **CSG** に関する代表的な性質について述べる．また **CSG** 問題が 0-1 整数計画問題として表現可能であることを示す．

2.1.CSG のフレームワーク

提携構造形成問題とは，あるエージェントの集合を社会的余剰（すべての提携における利得の総和）が最大化されるように，いくつかの提携に分割する問題である．まず提携構造形成に関する定義を以下に与える．

定義 1 (提携構造形成)**.** 提携構造形成 *(Coalition Structure Generation,* **CSG***)* は，A をエージェントの集合，$v : 2^A \to \mathbb{N}$ を特性関数とし，以下により定義される．

$$\mathbf{CSG} = \langle A, v\rangle. \tag{1}$$

エージェントの集合 A の部分集合 $C \subseteq A$ を提携 (*Coalition*) と呼び，提携 C に属するエージェントが協力して行動する際に得られる利得は $v(C)$ により与えられる．また，以下の条件を満たすような集合 A の分割を提携構造 (*Coalition Structure, CS*) と呼ぶ．

$$\begin{array}{l} (i)\ \forall i, j \in \{1, \ldots, m\}, i \neq j, C_i \cap C_j = \emptyset, \\ (ii)\ \bigcup\{C_i \mid C_i \in CS\} = A. \end{array} \tag{2}$$

提携構造形成 (**CSG**) では，各エージェントは一つの提携にのみ属し，複数の提携に同時に属することはない．また，各エージェントは単独提携を含み，いずれかの提携に属さなければならない．提携構造 CS の利得は各提携における利得の総和により与えられる．

$$V(CS) = \sum_{C_i \in CS} v(C_i). \tag{3}$$

また，ある提携構造 CS が以下の条件を満たしているとき，CS は最適であるといい，CS^* と記述する．

$$\forall\, CS : V(CS) \leq V(CS^*). \tag{4}$$

次に，**CSG** に関する最適化問題を以下に与える．

表 1: 各提携構造で得られる利得.

提携構造 CS	$V(CS)$
$\{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}\}$	7
$\{\{a_1\}, \{a_2, a_3\}\}$	11
$\{\{a_2\}, \{a_1, a_3\}\}$	10
$\{\{a_3\}, \{a_1, a_2\}\}$	10
$\{a_1, a_2, a_3\}$	10

定義 2 (**CSG** に関する最適化問題)**.**

- **Input:** 提携構造形成 **CSG** $= \langle A, v\rangle$,
- **Question:** すべての提携における利得の総和が最大となるような最適な提携構造 CS^* をみつけよ.

以下，**CSG** 問題に関する簡単な例を示す.

例 1 (**CSG** 問題)**.** 3 人のエージェントからなる提携構造形成 **CSG** $= \langle\{a_1, a_2, a_3\}, v\rangle$ 問題を考える．この問題における提携の数は $2^3 - 1 = 7$ である．特性関数により与えられる各提携における利得は以下とする．

$$v(\{a_1\}) = 2,\ v(\{a_2\}) = 3,\ v(\{a_3\}) = 2,$$

$$v(\{a_1, a_2\}) = 8,\ v(\{a_1, a_3\}) = 7,\ v(\{a_2, a_3\}) = 9,$$
$$v(\{a_1, a_2, a_3\}) = 10.$$

表 *1* に各提携構造で得られる利得を示す．例えば，全体提携からなる提携構造 $CS = \{a_1, a_2, a_3\}$ における利得は $V(CS) = 10$，単独のエージェントからなる提携構造 $CS' = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}\}$ の利得は $V(CS') = v(\{a_1\}) + v(\{a_2\}) + v(\{a_3\}) = 2 + 3 + 2 = 7$ となる．この例において，すべての提携における利得の総和が最大となるような最適な提携構造は $CS^* = \{\{a_1\}, \{a_2, a_3\}\}$ となり，CS^* により得られる利得は $V(CS^*) = v(\{a_1\}) + v(\{a_2, a_3\}) = 2 + 9 = 11$ となる．

以下に，**CSG** 問題における代表的な性質を示す.

性質 1. 提携構造形成 **CSG** $= \langle A, v\rangle$ において，特性関数 v が優加法性を満たすとき ¶，すべてのエージェントからなる全体提携が最適な提携構造 CS^* となる.

性質 2. 提携構造形成 **CSG** $= \langle A, v\rangle$ において，特性関数 v が劣加法性を満たすとき，単独のエージェントからなる単独提携が最適な提携構造 CS^* となる.

CSG 問題は完全集合分割問題 [12] と等価な問題であり，一般に，**NP**-完全な問題として知られている [10]. 但し，性質 1 及び 2 より，特性関数が優加法性，もしくは，劣加法性を満たすとき，元の問題を解くことなしに，前者に関しては全体提携，後者では単独提携が最適な提携構造となり，多項式時間内で求解可能となる.

¶提携構造形成 **CSG** $= \langle A, v\rangle$ において，特性関数 v が優加法的であるとは，$C_i \cap C_j = \emptyset$ を満たす任意の提携の組 C_i 及び C_j に関して，$v(C_i) + v(C_j) \leq v(C_i \cup C_j)$ が成り立つことを意味する．また，提携構造形成 **CSG** $= \langle A, v\rangle$ において，特性関数 v が劣加法的であるとは，$C_i \cap C_j = \emptyset$ を満たす任意の提携の組 C_i 及び C_j に関して，$v(C_i) + v(C_j) \geq v(C_i \cup C_j)$ が成り立つことを意味する.

2.2. 整数計画問題

CSG 問題は，0-1 整数計画問題として定式化可能であり，CPLEX 等の最適化ソルバーを用いて求解可能である．例えば，例 1 の **CSG** 問題を 0-1 整数計画問題を用いて表現すると，以下のように定式化される．

$$max.\ 2\cdot a_1+3\cdot a_2+2\cdot a_3+8\cdot a_{12}+ 7\cdot a_{13}+9\cdot a_{23}+10\cdot a_{123}, \tag{5}$$

$$s.t\quad a_1+a_{12}+a_{13}+a_{123}=1, \tag{6}$$

$$a_2+a_{12}+a_{23}+a_{123}=1, \tag{7}$$

$$a_3+a_{13}+a_{23}+a_{123}=1, \tag{8}$$

$$a_1,a_2,a_3,a_{12},a_{13},a_{23},a_{123}\in\{0,1\}. \tag{9}$$

ここで，$a_1,a_2,...,a_{123}$ は，すべての可能な提携を表している．例えば，a_1 はエージェント a_1 からなる単独提携 $\{a_1\}$，a_{123} は全体提携 $\{a_1,a_2,a_3\}$ を表している．各提携は変数として定義され，変数値 0 または 1 のいずれかの値を取る (式 (9))．式 (6)-(8) は提携に関する制約条件を表している．例えば，式 (6) には，エージェント a_1 が $\{a_1\}$，$\{a_1,a_2\}$，$\{a_1,a_3\}$，$\{a_1,a_2,a_3\}$ のいずれか 1 つの提携にのみ属し，複数の提携に同時に属することはできないという制約条件が記述されている．式 (7) は a_2，式 (8) は a_3 に関する制約条件をそれぞれ表している．式 (5) は，得られる利得が最大となるような提携構造を求める目的関数を表している．また，係数に関しては各提携で得られる利得が与えられている．

3. 確率的な提携構造形成問題

本章では，確率的な提携構造形成問題 (Probabilistic Coalition Structure Generation, **PCSG**) を提案し，**PCSG** に関する最適化問題を定義する．具体的には，従来の **CSG** のフレームワークに，各エージェントの（任意の）提携への参加の有無を確率で返す関数を追加することにより **PCSG** を定義する．また，各提携で得られる利得の期待値の計算方法として，(i) 提携の利得は，提携を構成する，すべてのエージェントが参加したときのみに与えられるものとする期待値計算法 1 及び，(ii) すべての可能な欠席者の組合せを考慮した利得の期待値の計算方法（期待値計算法 2）を与える．まず，確率的な提携構造形成を以下に定義する．

3.1.PCSG のフレームワーク

定義 3 (確率的な提携構造形成)**.** 確率的な提携構造形成 *(Probabilistic Coalition Structure Generation,* **PCSG***)* は，$A=\{a_1,a_2,..,a_n\}$ をエージェントの集合，$v:2^A\rightarrow\mathbb{N}$ を特性関数，$f:A\mapsto[0,1]$ を各エージェントの（任意の）提携への参加の有無を確率で返す関数とし，以下の組により定義される．

$$\textbf{PCSG}=\langle A,v,f\rangle. \tag{10}$$

また，関数 $f:A\rightarrow[0,1]$ は以下のように定義される．

$$f(a)=p,\ (0\le p\le 1). \tag{11}$$

ここで，各エージェントの任意の提携への参加の有無は独立であるものとする．すなわち，あるエージェントの提携への参加の有無は，他のエージェントの参加の有無には依存しないものとする．ある提携 C における利得の期待値を $v_e(C)$，ある提携構造 CS における利得の期待値を $V_e(CS)$ とそれぞれ記述する．

次に，**PCSG** に関する最適化問題を定義する．

定義 4 (**PCSG** に関する最適化問題)**.**

- **Input:** 確率的な提携構造形成 **PCSG** $=\langle A,v,f\rangle$,
- **Question:** すべての提携における利得の期待値の総和が最大となるような提携構造をみつけよ．

PCSG 問題では，どのように利得の期待値を計算するかが重要となる．本論文では，提携の利得は，提携を構成する，すべてのエージェントが参加したときのみ与えられるものとする期待値計算法 1 と，すべての可能な欠席者の組合せ（シナリオ）を考慮した利得の期待値の計算方法（期待値計算法 2）について考える．

3.2. 期待値計算法 1

確率的な提携構造形成 **PCSG** $=\langle A,v,f\rangle$ に関して，ある提携 C が成立する確率は $\prod_{a\in C}f(a)$ により与えられ，得られる利得の期待値は以下の式で定義される．

$$v_e(C)=v(C)\cdot\prod_{a\in C}f(a). \tag{12}$$

ここでは，提携が成立しない場合，すなわち，提携 C 内のメンバーで，一人でも欠席した場合，得られる利得は 0 とする．また，ある提携構造 CS が成立するとき，得られる利得の期待値は以下の式により定義される．

$$V_e^1(CS)=\sum_{C\in CS}v_e(C). \tag{13}$$

CSG のときと同様に，ある提携構造 CS が以下を満たすとき，CS は最適であるといい，CS_e^* と記述する．

$$\forall\ CS: V_e^1(CS)\le V_e^1(CS_e^*). \tag{14}$$

以下に，式 (12)-(13) を用いて，利得の期待値を計算した場合（期待値計算法 1）の **PCSG** 問題の例を示す．

例 2 (**PCSG** 問題：期待値計算法 1)**.** 例 *1* の **CSG** 問題において，各エージェントの提携への参加の有無を

$$f(a_1)=0.8,\ f(a_2)=0.5,\ f(a_3)=0.3.$$

とする．表 *2* に期待値計算法 1 を用いた場合の，各提携構造 CS で得られる利得の期待値 $V_e^1(CS)$ を示す．例えば，例 *1* の **CSG** 問題における最適な提携構造 $CS^*=\{\{a_1\},\{a_2,a_3\}\}$ において，得られる利得の期待値は，式 (12)-(13) より，以下のように計算される．

$$V_e^1(\{\{a_1\},\{a_2,a_3\}\})=v(\{a_1\})\cdot f(a_1)+$$

$$v(\{a_2,a_3\})\cdot(f(a_2)\cdot f(a_3))=2\cdot0.8+9\cdot(0.5\cdot0.3)=2.95.$$

表 2: 期待値計算法 1：得られる利得の期待値.

提携構造 CS	$V_e^1(CS)$
$\{\{a_1\},\{a_2\},\{a_3\}\}$	3.7
$\{\{a_1\},\{a_2,a_3\}\}$	2.95
$\{\{a_2\},\{a_1,a_3\}\}$	3.18
$\{\{a_3\},\{a_1,a_2\}\}$	3.8
$\{a_1,a_2,a_3\}$	1.2

しかし，表 2 より，この問題の最適な提携構造は $CS_e^* = \{\{a_3\},\{a_1,a_2\}\}$ となり，利得の期待値は以下となる．

$$V_e^1(\{\{a_3\},\{a_1,a_2\}\}) = v(\{a_3\}) \cdot f(a_3) +$$
$$v(\{a_1,a_2\}) \cdot (f(a_1) \cdot f(a_2)) = 2 \cdot 0.3 + 8 \cdot (0.8 \cdot 0.5) = 3.8.$$

PCSG 問題において，期待値計算法 1 を用いて得られる利得の期待値を求める場合，この問題は **CSG** 問題のときと同様に，0-1 整数計画問題として表現可能である．具体的には，**PCSG** 問題は **CSG** 問題における目的関数に，確率を加えることにより定式化可能であり，目的関数の記述のみが異なる．提携に関する制約条件は **CSG** のときと同じである．以下に，例 2 の **PCSG** 問題（期待値計算法 1）における目的関数を示す.

$$max.\ \ 2 \cdot 0.8 \cdot a_1 + 3 \cdot 0.5 \cdot a_2 + 2 \cdot 0.3 \cdot a_3 +$$
$$8 \cdot (0.8 \cdot 0.5) \cdot a_{12} + 7 \cdot (0.8 \cdot 0.3) \cdot a_{13} +$$
$$9 \cdot (0.5 \cdot 0.3) \cdot a_{23} + 10 \cdot (0.8 \cdot 0.5 \cdot 0.3) \cdot a_{123}. \quad (15)$$

最後に，**PCSG** 問題における性質について議論する．

性質 3. 期待値計算法 1 を用いた確率的な提携構造形成において，特性関数が優加法性を満たすとき，必ずしも全体提携が最適な提携構造になるとは限らない．

以下，特性関数が優加法性を満たす **PCSG** 問題において，全体提携が最適な提携構造にならない反例を示す．例 2 の **PCSG** 問題における，全体提携の利得を $v(\{a_1,a_2,a_3\}) = 14$ に変更した以下の問題を考える．

$$f(a_1) = 0.8,\ f(a_2) = 0.5,\ f(a_3) = 0.3,$$
$$v(\{a_1\}) = 2,\ v(\{a_2\}) = 3,\ v(\{a_3\}) = 2,$$
$$v(\{a_1,a_2\}) = 8,\ v(\{a_1,a_3\}) = 7,\ v(\{a_2,a_3\}) = 9,$$
$$v(\{a_1,a_2,a_3\}) = 14.$$

この **PCSG** 問題において，特性関数 v は優加法性を満たしている．**CSG** 問題では，性質 1 より，特性関数が優加法性を満たすとき，すべてのエージェントからなる全体提携 $CS^* = \{a_1,a_2,a_3\}$ が最適な提携構造となる．**PCSG** 問題では，全体提携で得られる利得の期待値は，式 (12)-(13) より，以下のように計算される．

$$V_e^1(CS^*) = v(\{a_1,a_2,a_3\}) \cdot (f(a_1) \cdot f(a_2) \cdot f(a_3))$$
$$= 14 \cdot (0.8 \cdot 0.5 \cdot 0.3) = 1.68.$$

この **PCSG** 問題における，最適な提携構造は例 2 で示したように $CS_e^* = \{\{a_3\},\{a_1,a_2\}\}$ であり，得られる利得の期待値は $V_e^1(CS_e^*) = 3.8$ となる．よって，**PCSG** 問題では，特性関数が優加法性を満たしたとしても，全体提携が必ずしも最適な提携構造になるとは限らない．

このことは，**CSG** 問題では，特性関数が優加法性を満たすとき，与えられた問題を解くことなしに，最適な提携構造が求解可能であるのに対し，期待値計算法 1 を用いた **PCSG** 問題では，特性関数が優加法性を満たしたとしても，元の問題を解く必要があることを意味している．但し，特性関数が劣加法性を満たすときは，**CSG** 問題のときと同様に以下の性質が成立する．

性質 4. 期待値計算法 1 を用いた確率的な提携構造形成において，特性関数が劣加法性を満たすとき，単独のエージェントからなる提携構造が最適となる．

紙面の都合上，詳細な証明は割愛するが，性質 4 は以下の等式が成り立つことから証明される．

$$v(\{a_i\}) \cdot f(a_i) + v(\{a_j\}) \cdot f(a_j) \geq v(\{a_i,a_j\}) \cdot f(a_i) \cdot f(a_j).$$

特性関数 v は劣加法性を満たすため $v(\{a_i\}) + v(\{a_j\}) \geq v(\{a_i,a_j\})$ が成立する．また，各エージェントの任意の提携への参加の有無（確率）は $0 \leq p \leq 1$ であるため，$f(a_i) + f(a_j) \geq f(a_i) \cdot f(a_j)$ が成立する．同様に，このことは $C_i \cap C_j = \emptyset$ を満たす任意の提携の組 C_i 及び C_j に関しても成立するため，性質 4 が導かれる．

3.3. 期待値計算法 2

PCSG 問題において，すべての可能なシナリオ（すべての可能な欠席者の組合せ）を考慮したときに，得られる利得の期待値について考える．あるエージェントの集合を A とし，欠席者の集合を $\bar{A} \subseteq A$ とする．このとき，可能な欠席者の組合せは $2^{\bar{A}}$ 通り存在する．任意の欠席者の集合 $\bar{a} \in 2^{\bar{A}}$ に関して，ある提携 C から欠席者 $\bar{a}$ を取り除いた，残りの提携は C から $C \cap \bar{a}$ を取り除いた集合で表され，$C \setminus \bar{a}$ と記述する．このとき，得られる利得は $v(C \setminus \bar{a})$ により与えられるものとする．また，ある提携構造 CS から欠席者 $\bar{a}$ を取り除いた残りの提携構造（$CS \setminus \bar{a}$ と記述する）において，得られる利得は，すべての提携から欠席者を取り除いた，残りの提携で得られる利得の総和，すなわち，$V(CS \setminus \bar{a}) = \sum_{C_i \in CS} v(C_i \setminus \bar{a})$ により与えられるものとする．ここで，ある提携構造 CS において，欠席者 $\bar{a}$ を取り除いた，残りの提携構造で得られる利得の期待値を以下のように定義し，$V_e(CS \setminus \bar{a})$ と記述する．

$$V_e(CS \setminus \bar{a}) = V(CS \setminus \bar{a}) \cdot \prod_{a \in A \setminus \bar{a}} f(a) \cdot \prod_{a' \in \bar{a}} (1 - f(a')). \quad (16)$$

また，ある提携構造 CS において，すべての可能なシナリオ（すべての欠席者の組合せ）を考慮したときに，得られる利得の期待値を以下のように定義し，期待値計算法 2 と呼び，$V_e^2(CS)$ と記述する．

$$V_e^2(CS) = \sum_{\bar{a} \in 2^{\bar{A}}} V_e(CS \setminus \bar{a}). \quad (17)$$

表 3: 期待値計算法 2：得られる利得の期待値.

提携構造 CS	$V_e^2(CS)$
$\{\{a_1\},\{a_2\},\{a_3\}\}$	3.7
$\{\{a_1\},\{a_2,a_3\}\}$	4.3
$\{\{a_2\},\{a_1,a_3\}\}$	4.42
$\{\{a_3\},\{a_1,a_2\}\}$	4.9
$\{a_1,a_2,a_3\}$	5.38

以下に，式 (17) を用いて，利得の期待値を計算したときの例を示す．ここでは，例 2 と同じ問題を扱う．

例 3 (**PCSG** 問題：期待値計算法 2)．この問題の最適な提携構造は $CS_e^* = \{a_1, a_2, a_3\}$ となり，得られる利得の期待値は式 *(17)* により，以下のように計算される．

- 全員が参加した場合（欠席者なし）：利得の期待値は，全体提携で得られる利得 10 及び，全員が参加する確率 $(0.8\cdot 0.5\cdot 0.3)$ の積により与えられる．

  $$V_e(\{\{a_1,a_2,a_3\}) = 10\cdot(0.8\cdot 0.5\cdot 0.3) = 1.2.$$

- 任意の 1 人が欠席した場合：例えば，エージェント a_1 が欠席した場合，$\{a_1,a_2,a_3\}$ から a_1 を取り除いた提携構造は $\{a_2,a_3\}$ となり，得られる利得の期待値は，提携構造 $\{a_2,a_3\}$ で得られる利得 9 及び，a_1 が欠席する確率 $(1-0.8)$ と a_2, a_3 が参加する確率の積 $(0.2\cdot 0.5\cdot 0.3)$ により与えられる．

  $$V_e(\{a_2,a_3\}) = 9\cdot(0.2\cdot 0.5\cdot 0.3) = 0.27.$$

  同様に，a_2 が欠席した場合は，$\{a_1,a_2,a_3\}$ から a_2 を取り除いた提携構造 $\{a_1,a_3\}$ で得られる利得 7 及び，a_2 が欠席する確率 $(1-0.5)$ と a_1, a_3 が参加する確率の積 $(0.8\cdot 0.5\cdot 0.3)$ により与えられ，$V_e(\{a_1,a_3\}) = 7\cdot(0.8\cdot 0.5\cdot 0.3) = 0.84$ となる．また，a_3 が欠席した場合は，$\{a_1,a_2,a_3\}$ から a_3 を取り除いた提携構造 $\{a_1,a_2\}$ で得られる利得 8 及び，a_3 が欠席する確率 $(1-0.3)$ と a_1, a_2 が参加する確率の積 $(0.8\cdot 0.5\cdot 0.7)$ により与えられ，$V_e(\{a_1,a_2\}) = 8\cdot(0.8\cdot 0.5\cdot 0.7) = 2.24$ となる．

- 任意の 2 人が欠席した場合：例えば，エージェント a_1 と a_2 が欠席した場合，得られる利得の期待値は，全体提携から a_1 及び a_2 を取り除いた提携構造 $\{a_3\}$ で得られる利得 2 及び，a_1 と a_2 が欠席する確率 $(1-0.8)$ 及び $(1-0.5)$ と，a_3 が参加する確率の積 $(0.2\cdot 0.5\cdot 0.3)$ により与えられる．

  $$V_e(\{a_3\}) = 2\cdot(0.2\cdot 0.5\cdot 0.3) = 0.06.$$

  同様に，a_1 と a_3 が欠席した場合は，全体提携から a_1 及び a_3 を取り除いた提携構造 $\{a_2\}$ で得られる利得 3 及び，a_1 と a_3 が欠席する確率 $(1-0.8)$ 及び $(1-0.3)$ と，a_2 が参加する確率の積 $(0.2\cdot 0.5\cdot 0.7)$ により与えられ，$V_e(\{a_2\}) = 3\cdot(0.2\cdot 0.5\cdot 0.7) = 0.21$ となる．また，a_2 と a_3 が欠席した場合は，全体提携から a_2 及び a_3 を取り除いた提携構造 $\{a_1\}$ で得られる利得 2 及び，a_2 と a_3 が欠席する確率 $(1-0.5)$ 及び $(1-0.3)$ と，a_1 が参加する確率の積 $(0.8\cdot 0.5\cdot 0.7)$ により与えられ，$V_e(\{a_1\}) = 2\cdot(0.8\cdot 0.5\cdot 0.7) = 0.56$ となる．

以上より，期待値計算法 2 を用いたときの，全体提携で得られる利得の期待値は $V_e^2(\{a_1,a_2,a_3\}) = 1.2 + (0.27+0.84+2.24) + (0.06+0.21+0.56) = 5.38$ となる．表 *3* に，各提携構造 CS における期待値計算法 2 を用いて得られる利得の期待値 $V_e^2(CS)$ を示す．

特性関数が優加法性または劣加法性を満たす **PCSG** 問題において，期待値計算法 2 を用いて，得られる利得の期待値を求めた場合，以下の性質が成り立つ．

性質 5. 確率的な提携構造形成 $\mathbf{PCSG} = \langle A, v, f\rangle$ において，特性関数 v が優加法性を満たすとき，全エージェントからなる全体提携が最適な提携構造となる．

性質 6. 確率的な提携構造形成 $\mathbf{PCSG} = \langle A, v, f\rangle$ において，特性関数 v が劣加法性を満たすとき，単独のエージェントからなる単独提携が最適な提携構造となる．

詳細な証明は割愛するが，これらの性質は背理法を用いて簡単に証明可能である．ここでは，紙面の都合上，性質 5 の証明についてのみ概説する[‖]．

特性関数 v が優加法性を満たす **PCSG** 問題に関して，全体提携を CS，得られる利得の期待値を $V_e^2(CS)$ とする．また，$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ を n 人のエージェントからなる集合，$\bar{A} \subseteq A$ を欠席者の集合とする．今，ある $\bar{a} \in 2^{\bar{A}}$ に関して，$V_e^2(CS) < V_e^2(CS')$ が成立するような，全体提携以外の提携構造 CS' が存在すると仮定する．このとき，式 (16) より，以下が成立する．

$$V_e^2(CS) = V(CS\setminus\bar{a})\cdot\prod_{a\in A\setminus\bar{a}} f(a)\cdot\prod_{a'\in\bar{a}}(1-f(a'))$$

$$< V(CS'\setminus\bar{a})\cdot\prod_{a\in A\setminus\bar{a}} f(a)\cdot\prod_{a'\in\bar{a}}(1-f(a')) = V_e^2(CS').$$

右辺と左辺に掛けられている確率は等しいため，この等式は，以下のように簡略化される．

$$V(CS\setminus\bar{a}) < V(CS'\setminus\bar{a}).$$

右辺の $CS'\setminus\bar{a}$ に関して，CS' から $\bar{a}$ を取り除いた，残りのエージェントで形成される提携を $C_1', C_2', ..., C_m'$ とする（$1 < m \le n$）．このとき，式 3 より，$V(CS'\setminus\bar{a})$ は各提携 $C_1', C_2', ..., C_m'$ で得られる利得の総和

$$V(CS'\setminus\bar{a}) = \sum_{i=1}^{m} v(C_i')$$

により与えられる．一方，左辺の CS は全体提携であり，$CS\setminus\bar{a}$ は，CS から $\bar{a}$ と取り除いた，残りのエージェントからなる全体提携となる．すなわち，

$$V(CS\setminus\bar{a}) = v(C_1'\cup C_2'\cup ...\cup C_m')$$

[‖] 性質 6 に関しても同様の方法で証明可能である．

が成立する．以上より，仮定である $V_e^2(CS) < V_e^2(CS')$ から，以下の等式が導出される．

$$v(C'_1 \cup C'_2 \cup ... \cup C'_m) < \sum_{i=1}^{m} v(C'_i).$$

この式は特性関数 v が優加法的であるということに矛盾する．よって，$V_e^2(CS) \geq V_e^2(CS')$ が成立する．

4. 関連研究

提携構造形成問題と類似したフレームワークにチーム編成問題 [8] がある．チーム編成問題とは，異なるスキルをもつエージェントの集合から，与えられたタスク集合が達成可能となるような部分集合（チーム）を編成する問題である．両者の違いとして，前者は完全集合分割問題と等価な問題であり，後者は，ある集合 A と，その部分集合の族 A_F が与えられたとき，A の要素をすべてカバーする A_F の部分集合は存在するかという集合被覆問題 [6] と等価な問題である．チーム編成に関する既存研究では，例えば，チーム編成問題に確率を導入し，すべてのタスクが達成可能となるように期待値を最大化するようなチーム編成に関する研究 [8] や，チーム内での各メンバーの振る舞いに着目した研究 [11] 等がある．一方，**CSG** 問題に関する既存研究では，著者らが知る限り，不確実なエージェントの振る舞いに着目した研究はほとんどなく，各エージェントの提携への参加の有無が確率で与えられている提携構造形成問題の研究は，ほとんど存在しない．

5. 結言

本論文では，各エージェントの提携への参加の有無が確率により与えられている，不確実性を考慮した確率的な提携構造形成 (**PCSG**) 問題のフレームワークを定義した．また **PCSG** 問題において，ある提携の利得は，提携を構成する全メンバーが参加したときのみ与えられるものとする期待値計算法 1 及び，すべての可能な欠席者の組合せを考慮した期待値計算法 2 をそれぞれ提案した．さらに，**PCSG** の性質に関して，特性関数が優加法性／劣加法性を満たすとき，従来の **CSG** との相違点及び類似点をそれぞれ明らかにした．

今後の課題として，まず **PCSG** アルゴリズムの開発が挙げられる．期待値計算法 1 を適用した **PCSG** 問題は，0-1 整数計画問題として表現可能であるため，CPLEX 等の既存の高速な最適化ソルバーを用いて求解すればよいが，期待値計算法 2 を適用した問題では，0-1 整数計画問題における目的関数の記述が複雑となり，0-1 整数計画問題として求解することは効率的とは言えない．そこで，各エージェントの確率を基にエージェント間の優先順位を決定し，擬似木 [4] と呼ばれる制約最適化問題で広く用いられているグラフ構造を生成し，制約最適化アルゴリズムを用いて問題を解くことを考えている．次に，**PCSG** の実問題への適用が挙げられる．具体的には，看護師の勤務グループ [2] や災害派遣医療チーム (DMAT) 編成 [14] 等を考えている．

参考文献

[1] Y. Bachrach, P. Kohli, V. Kolmogorov, and M. Zadimoghaddam. Optimal coalition structure generation in cooperative graph games. In *AAAI*, pages 81–87, 2013.

[2] E. Burke, P. Causmaecker, G. Berghe, and H. Landeghem. The State of the Art of Nurse Rostering. *Journal of Scheduling*, 7(6):441–499, 2004.

[3] V. Dang, R. Dash, A. Rogers, and N. Jennings. Overlapping coalition formation for efficient data fusion in multi- sensor networks. In *AAAI*, pages 635–640, 2006.

[4] E. Freuder and M. Quinn. Taking advantage of stable sets of variables in constraint satisfaction problems. In *IJCAI*, pages 1076–1078, 1985.

[5] J. George, J. Pinto, P. Sujit, and J. Sousa. Multiple UAV coalition formation strategies. In *AAMAS*, pages 1503–1504, 2010.

[6] R. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In *Complexity of Computer Computations*, pages 85–103, 1972.

[7] H. Kitano and S. Tadokoro. Robocup rescue: A grand challenge for multiagent and intelligent systems. *AI Magazine*, 22(1):39–52, 2001.

[8] R. Nair and M. Tambe. Hybrid BDI-POMDP framework for multiagent teaming. *Journal of Artificial Intelligent Research*, 23:367–420, 2005.

[9] T. Rahwan and N. Jennings. Coalition structure generation: Dynamic programming meets anytime optimization. In *AAAI*, pages 156–161, 2008.

[10] T. Sandholm and V. Lesser. Coalitions among computationally bounded agents. *Artificial Intelligence*, 94(1-2):99–137, 1997.

[11] J. Vidal. The effects of co-operation on multiagent search in task-oriented domains. *Journal of Experimental and Theoretical Artificial Intelligence*, 16(1):5–18, 2004.

[12] D. Yeh. A dynamic programming approach to the complete set partitioning problem. *BIT Computer Science and Numerical Mathematics*, 26(4):467–474, 1986.

[13] 上田俊, 岩崎敦, 横尾真, M. C. Silaghi, 平山勝敏, and 松井俊浩. 分散制約最適化問題に基づく提携構造形成問題. **人工知能学会論文誌**, 26(1):179–189, 2011.

[14] 日本集団災害医学会. DMAT 標準テキスト. 2015.