CF-001

変動的人口モデルにおける耐戦略的な施設配置メカニズム
Truthful Facility Location Mechanisms for Variable Population Model

和田 勇歩 * 小野 友寛* 東藤 大樹* 横尾 真*
Yuho Wada Tomohiro Ono Taiki Todo Makoto Yokoo

1 序論

施設配置問題（facility location problem）は，複数のエージェントが申告する所在地に基づいて，施設の配置位置を適切に決定する問題であり，伝統的には社会選択理論やオペレーションズ・リサーチの領域において広く研究されてきた [1]．施設の配置位置に対する適切さを計る評価指標は様々なものがあり，施設の配置位置と各エージェントの所在地の距離の総和（社会的コスト）や，施設の配置位置から最も遠いエージェントの所在地との距離（最大コスト）などが代表的な例である．直線上の施設配置問題においては，エージェントの所在地の中央値 (median) が社会コストを最小化することが知られている．一方，エージェントの所在地の中点（center）は最大コストを最小化する解である．

また，メカニズムデザインとは，ミクロ経済学とゲーム理論の一分野であり，複数のエージェントが行う集団意思決定のためのルール（メカニズム）を設計する研究である [2]．近年では，施設配置問題をメカニズムデザインの立場から議論した研究が数多く存在する [5, 13]．メカニズムデザインにおいては，エージェントは利己的であると仮定する．すなわち，虚偽の申告を行うことで自身の利益を向上できるのであれば，エージェントは虚偽の申告を行うことを厭わないとする．しかしながら，エージェントが虚偽の申告を行うと，適切な施設の配置位置が決定できない．したがって，メカニズムは，エージェントが虚偽の申告を行っても利益を向上できないことを保証する必要がある．この性質を，耐戦略性（truthfulness）と呼ぶ．上述の中央値を選ぶメカニズムは耐戦略性を満足する一方，中点を選ぶメカニズムは耐戦略性を満足しないことが知られている．

メカニズムデザインの研究では，耐戦略性以外にも，エージェントがメカニズムに参加しないこと（秘匿）を選択する，という問題に直面することがある．エージェントにとって，自身を秘匿することで利益を向上できる可能性がある場合には，エージェントはメカニズムに参加する強い誘因を持てず，その結果，コミュニティとしての正常な意思決定が妨げられる．したがって，メカニズムは，耐戦略性と同様，耐秘匿性（avoiding no-show-paradox）という性質を満たすことが望まれる．耐秘匿性とは，エージェントが秘匿しても，自身にとってより望ましい結果にならないことを保証する性質である．

一方，現実の意思決定の場面では，影響力のあるエージェントの発言力が強くなってしまうことで，公平な意思決定ができないという問題も散見される．社会的に影響力の強いエージェントの要求を過度に尊重し，そのエージェントの所在地の付近に施設が配置されることで，公平性や社会全体の効率が損なわれる可能性がある．そのため，メカニズムには，エージェントを公平に扱うことが期待される．公平性の一つの概念として，本研究では匿名性（anonymity）を考慮する．匿名性（anonymity）を満たす施設配置メカニズムは，施設の配置位置の決定に，エージェントの名前（名義）に関する情報を用いない．言い換えると，エージェントの集合によって申告された所在地の組が同じであるならば，施設の配置位置が常に同じ位置となることを保証する．

一般に，施設配置メカニズムは，社会コストや最大コストの観点で常に最適な施設配置を返す保証はない．実際，既存研究によって，最大コストを最小化する耐戦略的なメカニズムは存在しないことが知られている [3]．メカニズムデザインの観点では，この問題に対し，近似メカニズムの設計によるアプローチが一般的である．この近似メカニズムに関しては論文の後半で少し触れる．一方，本研究では，この問題に対し，ミクロ経済学やメカニズムデザインの分野で一般的な，パレート効率性（Pareto efficiency）と呼ばれる性質をメカニズムに要求するアプローチを採用する．施設の配置位置がパレート効率的であるとは，エージェントのうち少なくとも一人の利益を減少させなければ，他のいずれのエージェントも利益をこれ以上増加させることができないことである．メカニズムが常にパレート効率的な施設の配置位置を返すとき，そのメカニズムはパレート効率性を満足するという．匿名性，パレート効率性，耐戦略性を同時に満たす唯一のメカニズムのクラスとして，一般化中位投票者スキーム（Generalized Median Voter Schemes/ GMVS）が提案されている [7]．

また，オンライン問題（online problem）とは，一度きりの意思決定を行う静的な環境ではなく，複数回の意思決定を行う動的な環境を考える問題である．施設配置や投票を始めとする現実の意思決定では，決定が一度きりということは稀であり，将来に渡って幾度も意思決定を行うことに

* 九州大学大学院システム情報科学府 Kyushu University Graduate School/ Faculty of Information Science and Electrical Engineering

なる．オンライン問題におけるメカニズム設計の難しさは，オンラインアルゴリズムの難しさと同様，未来に起こる出来事を予め観測できないことに起因する [4]．実際，動的な環境における施設配置問題では，静的な環境の場合には無かった制約も考慮する必要があり，静的な環境の場合と違った結果が得られると考えられる．本研究では，この動的な環境についても議論を行う．

本論文では，直線上に 1 つの施設を配置する施設配置問題を扱い，大きく 3 つの研究成果を報告する．まず，静的な環境において GMVS が耐秘匿性を満足するための必要十分条件を示す．この成果は，著者らが知る限り，耐秘匿性を満足する施設配置メカニズムに関する初の特徴付けと呼べるものである．次に，静的な環境における上述の特徴付けを用いて，動的な環境で匿名性，パレート効率性，耐戦略性の 3 性質を同時に満たすメカニズムの特徴付けを行う．具体的には，動的 GMVS (dynamic GMVS/ D-GMVS) というメカニズムのクラスを定義し，あるメカニズムが匿名性，パレート効率性，耐戦略性の 3 性質を同時に満足するとき，そのメカニズムは必ず D-GMVS に属することを示す．動的な環境における耐戦略的な施設配置メカニズムの特徴付けは世界初の成果である．さらに，文献 [4] と同様，動的な環境における参加者のメカニズムへの参加時刻に自然な仮定を置き，その仮定のもとで，匿名性，パレート効率性，耐戦略性の 3 性質を満たす別の施設配置メカニズムの提案を行う．上述の動的な環境における特徴付けと比較すると，参加時刻に自然な仮定を置くことで，耐戦略性の要求が緩和され，その結果，D-GMVS に属さない施設配置メカニズムが 3 性質を同時に満足可能となっている．

本論文の構成を以下に示す．まず第 2 章で，本論文の関連研究を紹介し，本研究との差異を明確にする．第 3 章では，本論文で扱う施設配置問題のモデルを示す．第 4 章および第 5 章では，静的な環境および動的な環境における特徴付けに関する成果をそれぞれ示す．第 6 章では，さらなる議論を行う．まず 6.1 節で，動的な環境における自然な仮定を導入し，新たなメカニズムを設計する．また 6.2 節では，近似メカニズムについて議論する．最後に第 7 章で，結論と今後の課題を示す．

2 関連研究

施設配置問題はオペレーションズ・リサーチ，ミクロ経済学，および計算機科学の各分野で広く研究されている [6, 9, 13]．Moulin によるミクロ経済学分野の著名論文 [7] では，静的な環境において，匿名性，パレート効率性，耐戦略性の 3 性質を同時に満たすメカニズムの特徴付けが行われている．また，今回扱う変動的な人口モデルにおける施設配置問題を取り扱った関連研究として，文献 [11] が存在する．この文献では，耐秘匿性を満たすメカニズムの提案が行われている．しかしながら，耐秘匿性を満足するメカニズムの特徴付けは示されていない．

メカニズムデザインの研究では，上記 Moulin の論文のように，望ましい性質を満足するメカニズムの特徴付けを行うことが重要な課題とされている．メカニズムの特徴付けに成功すれば，メカニズムを提案する立場として，メカニズムを実際に運用しようとする第 3 者に，望ましい性質を満足するメカニズムの完全なリストを提示できるためである．施設配置問題以外の各問題においても，耐戦略性を満足するメカニズムに関する特徴付けが得られている．例えばオークションの分野では，文献 [12] で，耐戦略性を満たすオークションメカニズムの特徴付けが行われている．また，臓器移植ネットワークなど，金銭の授受を介さずに非分割財を交換する問題において，文献 [10] で，Top Trading Cycle（TTC）という交換メカニズムが，耐戦略性，パレート効率性などを満足する唯一のメカニズムであることが示されている．

本研究で扱う動的な環境のモデルは，動的な環境におけるメカニズムデザインに関する文献 [4] で示されたモデルに準ずる．文献 [14] では，同様のモデルのもとでオークションメカニズムの特徴付けを行っている．前述の通り，静的な環境に置ける施設配置問題を考察した研究は数多く存在する．しかしながら，動的な環境における施設配置問題を取り扱った研究は多くなく，パレート効率性，耐戦略性を取り扱った研究は著者らの知る限り存在しない．

3 準備

本章では，まず，本論文で扱う施設配置問題のモデルを示す．続いて，次章以降で議論する性質とメカニズムの定義，および既存研究で示された定理の説明を行う．

本論文では，複数回に渡り，有限な 1 次元の区間（直線）$\mathcal{I} = [0, 1]$ 上に 1 つの施設を配置する問題を考える．施設の配置位置を再決定する区切りをピリオドと呼ぶこととする．$\mathcal{T} = \{1, \ldots, T\}$ をピリオドの集合とし，各ピリオド $t \in \mathcal{T}$ において施設の配置位置を再決定する．この時，全てのエージェントがメカニズムに参加するわけではなく，施設を利用するエージェントのみがメカニズムに参加する．そのため，潜在的なエージェントの集合を $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots\}$ とし，メカニズムに参加するエージェントの集合を $N \subseteq \mathcal{N}$ とする．エージェント $i \in N$ はメカニズムに参加する際，タイプと呼ばれる $\theta_i = (x_i, a_i, d_i)$ を申告することで，メカニズムへの参加を表明する．$x_i \in \mathcal{I}$ は i が施設の配置位置として望む位置（所在地），$a_i \in \mathcal{T}$ は i が初めて所在地を申告するピリオド（参加ピリオド），$d_i \in \mathcal{T}$ は i が最後に所在地を申告するピリオド（退出ピリオド）を意味する．この時，参加ピリオドの値よりも退出ピリオドの値が小さくなることは不自然であるため，$a_i \leq d_i$ という自然な仮定を置くことができる．また，公平性を保つために，各エージェントはメカニズムに 2 度以上参加することはできないものとする．i のタイプの集合を $\Theta_i \subset \mathcal{I} \times \mathcal{T} \times \mathcal{T}$ とし，メカニズムに参加するエージェントのタイプの組を $\theta = (\theta_i)_{i \in N} \in \Theta := \times_{i \in N} \Theta_i$

と表現する．エージェント i のタイプを除いた参加者のタイプの組を θ_{-i} と表記する．また，ピリオド t で所在地を申告するエージェントの集合を $N^t := \{i \in N \mid a_i \le t \le d_i\}$ とし，ピリオド t に申告される所在地の組を $h^t(\theta) := (x_i)_{i \in N^t}$ を用いることで参照できる．

本モデルでは，各ピリオドにおける施設の配置位置の組を $o = (o_1, \ldots, o_T) \in \mathcal{O} := \mathcal{I}^T$ と表す．メカニズム $f : \Theta \to \mathcal{O}$ は，メカニズムに参加するエージェントのタイプの組を入力とし，各ピリオドにおける施設の配置位置の組を出力として返し，$f(\theta) = (f^1(\theta), \ldots, f^T(\theta))$ と書き表す（$f^t : \Theta \to \mathcal{I}$）．現実において，未来に起こりうることを完全に推測する（知る）ことは不可能である．したがって，文献 [4] にならい，メカニズムは現在のピリオドを含みそれ以前の情報のみ参照可能で，未来の情報は参照できないものとする．

メカニズムが満たす性質について議論を行う際に，任意の位置の組 Y について，x に関する条件式 A を満たす Y の成分の数を返す関数を $NL_A : \mathcal{I}^{|Y|} \to \mathbb{R}$ と表現する．例えば，$h^3(\theta) = (0.1, 0.1, 0.3, 0.4, 0.6, 0.8)$ の場合において，第 3 ピリオドに $x < 0.5$ を満たす位置にエージェントは合計で 4 人存在する．このことを記述する場合，$NL_{x<0.5}(h^3(\theta)) = 4$ と記述できる．各エージェントは自身の所在地と施設の配置位置に関してコストを持っており，エージェント i のコストを $c_i(o) := \sum_{t=a_i}^{d_i} |x_i - o_t|$ と表す．つまり，エージェントの所在地と施設の配置位置が近い（コストが小さい）ほど，エージェントは効用が高いと考える．特殊なケースとして，$T = 1$ の場合を静的な環境とし，本論文において，静的な環境を扱う場合には t を省略して記す．最後に，任意の位置の組 Z から中央値を返す関数を $m : \mathcal{I}^{|Z|} \to \mathcal{I}$ とする．$|Z|$ が偶数の時は，位置の値が小さい方から $|Z|/2$ 番目の位置を返す．$|Z|$ が奇数の時は，小さい方から $(|Z|+1)/2$ 番目の位置を返す．

匿名性を満たさないメカニズムの下では，利己的なエージェントが自身の名義を偽り，自身にとってより望ましい結果を得ようとすることが考えられる．したがって，メカニズムを設計する際，匿名性を満たすメカニズムを設計することが重要である．文献 [5] にならい，本モデルにおける匿名性を次のように定義する．

定義 1 (匿名性)**.** $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ をエージェントに関する順列とした時，あるメカニズム f が匿名性を満たすとは，以下の式が成り立つことである．

$$\forall N \subseteq \mathcal{N}, \forall \theta \in \Theta, f(\theta_1, \ldots, \theta_{|N|}) = f(\theta_{\pi(1)}, \ldots, \theta_{\pi(|N|)})$$

社会コストや最大コストなど，施設の配置位置がどれほど望ましいかを測る様々な評価指標が存在する．本論文では，メカニズムがパレート効率性と呼ばれる性質を満たすか否かで効率性を計ることとする．パレート効率的な施設の配置位置は，施設の配置位置を他の任意の位置に変更したとしても，エージェントのうち少なくとも一人の効用を逓減させなければ，他のいずれのエージェントも効用をこれ以上高めることができないことを保証する．パレート効率性とは，メカニズムが返す施設の配置位置が常にパレート効率的であることを保証する．文献 [6] にならい，本モデルにおけるパレート効率性を次のように定義する．

定義 2 (パレート効率性)**.** $\forall \theta \in \Theta, \forall N \subseteq \mathcal{N}, \forall a \in \mathcal{I}, \forall b \in \mathcal{I}$ について，以下の 2 つの式を満たすとき a が b をパレート支配するという．

$$\forall i \in N, c_i(a) \le c_i(b)$$
$$\exists j \in N, c_j(a) < c_j(b)$$

あるメカニズム f がパレート効率性を満たすとは，$\forall \theta \in \Theta, \forall t \in \mathcal{T}, \forall b \in \mathcal{I}$ について，$f^t(\theta)$ が b にパレート支配されないことをいう．

利己的なエージェントが行う不正な行為として秘匿が挙げられる．秘匿とは，本来メカニズムに参加するエージェントがあえて参加を表明しないことである．メカニズムがエージェントの秘匿行為に対し，頑健であることを保証する性質を耐秘匿性と呼ぶ．耐秘匿性を満たさないメカニズムの下では，エージェントは秘匿することにより，自身にとってより望ましい結果を得ることができる．したがって，メカニズムは耐秘匿性を満たすことが望まれる．文献 [8] にならい，本モデルにおける耐秘匿性を次のように定義する．

定義 3 (耐秘匿性)**.** あるメカニズム f が耐秘匿性を満たすとは，以下の式が成り立つことである．

$$\forall N \subseteq \mathcal{N}, \forall \theta \in \Theta, \forall i \in N, c_i(f(\theta)) \le c_i(f(\theta_{-i}))$$

耐秘匿性の他に，メカニズムが満たすべき性質として耐戦略性が存在する．耐戦略性を満たさないメカニズムの下では，エージェントは虚偽の申告を行うことにより，自身にとってより望ましい結果を得ることが可能となる．したがって，メカニズムは耐秘匿性と共に耐戦略性を満たすことが強く望まれる．文献 [7] にならい，本モデルにおける耐戦略性を次のように定義する．

定義 4 (耐戦略性)**.** あるメカニズム f が耐戦略性を満たすとは，以下の式が成り立つことである．

$$\forall N \subseteq \mathcal{N}, \forall \theta \in \Theta, \forall i \in N, \forall \theta'_i \in \Theta_i, c_i(f(\theta)) \le c_i(f(\theta_{-i}, \theta'_i))$$

GMVS ではパラメータと呼ばれる位置の組を用いて，施設の配置位置を決定する．$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して，パラメータの組を $p(n) := (\beta_1^n, \ldots, \beta_{n-1}^n)$ と定義する．この時，パラメータには $\beta_1^n \le \ldots \le \beta_{n-1}^n$ という関係性がある．以下に，本モデルにおける GMVS をパラメータに着目して定義し，次に，GMVS を動的な環境に拡張した D-GMVS を定義する．

定義 5 (GMVS)**.** GMVS を g とした時，g は以下のルールに従い施設の配置位置を決定する．なお，$|N| = 0, 1$ の時パラメータは発行されない．

$$\forall N \subseteq \mathcal{N}, \forall \theta \in \Theta, g(\theta) := m(h(\theta), p(|N|))$$

定義 6 (D-GMVS)**.** D-GMVS，$G = (g^1, \ldots, g^T)$ は各ピリオドにおいて独立に GMVS を行うものとする．ただし，$t \in \mathcal{T}$ において g^t は，ピリオド t に行う GMVS を意味する．

GMVS は文献 [7] で耐戦略性を満たすメカニズムとして特徴付けされた．先の文献で示された定理を以下に記す．

定理 1 (Moulin 1980)**.** GMVS は静的な環境ににおいて，匿名性，パレート効率性，耐戦略性を同時に満たす唯一のメカニズムのクラスである．

4 静的な環境において耐秘匿性および耐戦略性を同時に満たすメカニズムの特徴付け

本モデルにおいて，$T = 1$ の場合，施設の配置位置を決定する回数は静的な環境と同様に 1 度きりである．したがって，$T = 1$ を特殊なケースとして，静的な環境と同等に考えることが可能である．本章では，静的な環境において GMVS が耐秘匿性を満たす必要十分条件を明らかにする．まず，GMVS のパラメータを適切に設定していない場合において，GMVS が耐秘匿性を満たさない例を紹介する．

例 1. $N = \{1, 2, 3\}, x_1 = 0, x_2 = 0.1, x_3 = 1, \beta_1^3 = 0.6, \beta_2^3 = 0.7, \beta_1^2 = 0.2$ の場合を考える．この例において，GMVS に参加するエージェントの数が 2 人の場合，使用するパラメータは β_1^2 となる．3 人の場合は β_1^3, β_2^3 を使用する．全員が GMVS に参加した時の中央値は β_1^3 の位置となり，施設の配置位置は $g(\theta) = 0.6$ となる．この時のエージェント 2 のコストは $c_2(g(\theta)) = 0.5$ である．次に，エージェント 2 が秘匿する場合を考える．この時，メカニズムに参加するエージェントの数は 2 人になるので，使用するパラメータは β_1^2 になる．したがって，施設の配置位置は $g(\theta_{-2}) = 0.2$ となり，2 のコストは $c_2(g(\theta_{-2})) = 0.1$ となる．2 のコストの関係が $c_2(g(\theta)) > c_2(g(\theta_{-2}))$ となることから，パラメータの値をこれらに設定された GMVS は耐秘匿性を満たさない．この例を図 1 に示す．

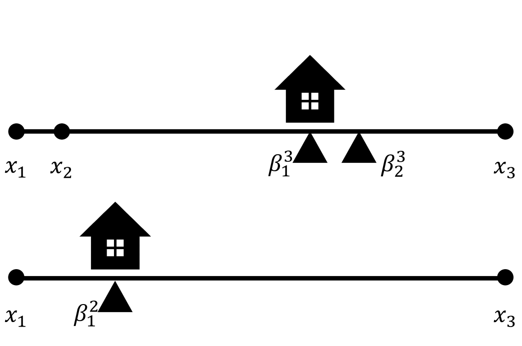

図 1 例 1：黒点はエージェント，三角はパラメータ，家は施設を意味し，上図は全員が所在地を申告している場合，下図はエージェント 2 が秘匿した場合を示す．

例 1 が示すように，適切なパラメータの値を設定しなければ，GMVS は耐秘匿性を満たさない．このように，エージェントが秘匿することにより自身の効用が高くなると，エージェントが利己的である場合に，自ら進んで秘匿することが考えられる．以下では，GMVS が耐秘匿性を満たす必要十分条件を定理 2 で示し，証明を与える．

定理 2. GMVS が耐秘匿性を満たす必要十分条件は，以下の式が成り立つことである．

$$\forall N \subseteq \mathcal{N}, \forall k \in \{1, \ldots, |N| - 2\}, \quad \forall \beta_k^{|N|} \leq \beta_k^{|N|-1} \leq \beta_{k+1}^{|N|} \tag{1}$$

この定理を 2 つの補題に分けて証明を行う．

補題 1. GMVS である g が式（1）を満たすならば，g は耐秘匿性を満たす．

証明. GMVS が式（1）を満たすと仮定する．$\forall N \subseteq \mathcal{N}$ について，(i) $g(\theta) < \beta_1^{|N|}$，(ii) $g(\theta) = \beta_1^{|N|}$，(iii) $\beta_1^{|N|} < g(\theta) < \beta_{|N|-1}^{|N|}$ の 3 つの場合に場合分けを行い，任意のエージェント $i \in N$ が秘匿しても，自身のコストが減少しないことを示す．

場合分けを行う前に，$g(\theta) = x_i$ となるエージェント i について考える．この時，明らかに $c_i(g(\theta)) \leq c_i(g(\theta_{-i}))$ となる．したがって，$g(\theta) = x_i$ となる i が秘匿する誘因を持たないことは明らかなこととして，以下では省略する．

初めに，(i) の場合を考える．この場合，$NL_{x \leq g(\theta)}(h(\theta)) = |N|, NL_{x > g(\theta)}(p(|N|)) = |N| - 1$ となる．$x_i < g(\theta)$ なる位置を所在地とするエージェント i が秘匿する場合を考える．この時，$NL_{x < g(\theta)}(h(\theta_{-i})) = NL_{x < g(\theta)}(h(\theta)) - 1$ となる．また $g(\theta) < \beta_1^{|N|} \leq \beta_1^{|N|-1}$ より，$NL_{x > g(\theta)}(p(|N| - 1)) = NL_{x > g(\theta)}(p(|N|)) - 1$ となる．したがって，$g(\theta)$ を挟んでエージェントの数とパラメータの数が 1 つずつ減るため，施設の配置位置は $g(\theta_{-i}) = g(\theta)$ となり，$c_i(g(\theta)) = c_i(g(\theta_{-i}))$ となる．$g(\theta) > \beta_{|N|-1}^{|N|}$ の場合も同様の議論が成立する．

次に (ii) の場合を考える．$NL_{x \geq g(\theta)}(p(|N|)) = |N| - 1$ となることから，$x_j \geq g(\theta)$ なる位置に少なくとも 1 人のエージェント j が存在する．まず，j が秘匿する場合を考える．この時，$NL_{x \geq g(\theta)}(h(\theta_{-j})) = NL_{x \geq g(\theta)}(h(\theta)) - 1, NL_{x < g(\theta)}(h(\theta_{-j})) = NL_{x < g(\theta)}(h(\theta)), NL_{x \geq g(\theta)}(p(|N| - 1)) = NL_{x \geq g(\theta)}(p(|N|)) - 1$ となる．$x \geq g(\theta)$ となる位置 x のエージェントの数とパラメータの数が 1 つずつ減るため，施設の配置位置は $g(\theta_{-j}) \leq g(\theta)$ となる．したがって，$c_j(g(\theta)) \leq c_j(g(\theta_{-j}))$ となる．$x_i < g(\theta)$ なる位置にあるエージェント i が存在する場合，(i) の場合と同様に i は秘匿する誘因を持たない．$g(\theta) = \beta_{|N|-1}^{|N|}$ の場合も同様の議論が成立する．

最後に，(iii) の場合に，$x_i < g(\theta)$ となる位置を所在地とするエージェント i が秘匿する場合を考える．$\forall k \in \{2, \ldots, |N| - 2\}$ とした時，まず $g(\theta) = \beta_k^{|N|-1}$ となる場合

を考える．この時，$NL_{x<g(\theta)}(h(\theta_{-i})) = NL_{x<g(\theta)}(h(\theta)) - 1, NL_{x\geq g(\theta)}(h(\theta_{-i})) = NL_{x\geq g(\theta)}(h(\theta)), NL_{x\geq g(\theta)}(p(|N|-1)) = NL_{x\geq g(\theta)}(p(|N|)), NL_{x\leq g(\theta)}(p(|N|-1)) = NL_{x\leq g(\theta)}(p(|N|))$ となる．また，$NL_{x=g(\theta)}(h(\theta_{-i})) + NL_{x=g(\theta)}(p(|N|-1)) \geq 2$ となることから，施設の配置位置は $g(\theta_{-i}) = g(\theta)$ となる．したがってこの場合，$c_i(g(\theta)) = c_i(g(\theta_{-i}))$ となる．次に，$g(\theta) < \beta_k^{|N|-1}$ となる場合を考える．この時，$NL_{x<g(\theta)}(h(\theta_{-i})) = NL_{x<g(\theta)}(h(\theta)) - 1, NL_{x\geq g(\theta)}(h(\theta_{-i})) = NL_{x\geq g(\theta)}(h(\theta)), NL_{x<g(\theta)}(p(|N|-1)) = NL_{x<g(\theta)}(p(|N|)) - 1, NL_{x\geq g(\theta)}(p(|N|-1)) = NL_{x\geq g(\theta)}(p(|N|))$ となる．したがって $x < g(\theta)$ となる位置 x のエージェントの数とパラメータの数が 1 つずつ減るため，施設の配置位置は $g(\theta) \leq g(\theta_{-i}) \leq \beta_k^{|N|-1}$ となり，$c_i(g(\theta)) \leq c_i(g(\theta_{-i}))$ となる．最後に，$g(\theta) > \beta_k^{|N|-1}$ の場合を考える．この時，$NL_{x<g(\theta)}(h(\theta_{-i})) = NL_{x<g(\theta)}(h(\theta)) - 1, NL_{x\geq g(\theta)}(h(\theta_{-i})) = NL_{x\geq g(\theta)}(h(\theta)), NL_{x\geq g(\theta)}(p(|N|-1)) = NL_{x\geq g(\theta)}(p(|N|)) - 1, NL_{x<g(\theta)}(p(|N|-1)) = NL_{x<g(\theta)}(p(|N|))$ となる．したがって，$g(\theta)$ を挟んでエージェントの数とパラメータの数が 1 つずつ減るため，施設の配置位置は $g(\theta_{-i}) = g(\theta)$ となり，$c_i(g(\theta)) = c_i(g(\theta_{-i}))$ となる．これらの場合において，$x_j > g(\theta)$ となる位置のエージェント j が秘匿したとしても，同様の議論が成立する．

以上の議論から，GMVS である g が式（1）を満たすならば，g は耐秘匿性を満たすことが示された． □

補題 2. GMVS である g が式（1）を満たさなければ，g は耐秘匿性を満たさない．

証明. $\exists N \subseteq \mathcal{N}, \exists k \in \{1, \ldots, |N|-2\}$ について，$\beta_k^{|N|-1} < \beta_k^{|N|}$ または，$\beta_{k+1}^{|N|} < \beta_k^{|N|-1}$ となる場合に耐秘匿性を満たさないことを示す．

$\beta_k^{|N|-1} < \beta_k^{|N|}$ の時に，エージェントの所在地が $x_1 = \ldots = x_k = 0, x_{k+1} = \ldots = x_{|N|} = 1$ となる場合を考える．この時の施設の配置位置は $g(\theta) = \beta_k^{|N|}$ となる．この場合に，$x_i = 0$ を所在地とするエージェント i が秘匿すると，$NL_{x=0}(h(\theta_{-i})) = k-1, NL_{x=1}(h(\theta_{-i})) = |N|-k$, $NL_{x\leq\beta_k^{|N|-1}}(p(|N|-1)) = NL_{x\leq\beta_k^{|N|}}(p(|N|))$, $NL_{x\geq\beta_k^{|N|-1}}(p(|N|-1)) = NL_{x\geq\beta_k^{|N|}}(p(|N|)) - 1$ となる．このことから施設の配置位置が $g(\theta_{-i}) = \beta_k^{|N|-1}$ となる．$\beta_k^{|N|-1} < \beta_k^{|N|}$ より，$c_i(g(\theta_{-i})) < c_i(g(\theta))$ となる．$\beta_{k+1}^{|N|} < \beta_k^{|N|-1}$ の場合も同様の議論が可能である．この耐秘匿性を満たさない例の図を，図 2 に示す．

以上の議論より，GMVS である g が式（1）を満たさなければ，g は耐秘匿性を満たさないことが示された． □

定理 2 が示すことは，匿名性，パレート効率性，耐戦略性，耐秘匿性の 4 性質を同時に満たすメカニズムの特徴付けと同義である．

静的な環境において，匿名性，パレート効率性，耐秘匿性を同時に満たすメカニズムの特徴付けは著者らの知る限り行われていないため，今後の課題として残されている．

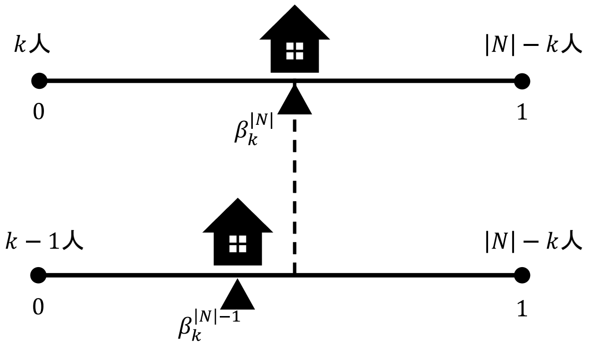

図 2　補題 2 の証明中の耐秘匿性を満たさない例：黒点はエージェント，三角はパラメータの位置，家は施設を意味する．

5　動的な環境において耐戦略性を満たすメカニズムの特徴付け

本章では，動的な環境で匿名性，パレート効率性，耐戦略性の 3 つの性質を同時に満足する唯一のメカニズムのクラスとして，D-GMVS の特徴付けを行う．それではまず，D-GMVS の動作例を紹介する．

例 2. $T = 3, N = \{1,2,3,4\}, \theta_1 = (0,1,1), \theta_2 = (1,1,3), \theta_3 = (0.2,2,3), \theta_4 = (0.7,3,3)$ の場合を考える．なお，簡単のために各ピリオドでは共通のパラメータ $\beta_1^2 = 0.4, \beta_1^3 = 0.1, \beta_2^3 = 0.9$ を用いることとする．第 1 ピリオドでは，$h^1(\theta) = (0,1)$ であるから，使用されるパラメータは β_1^2 である．したがって $g^1(\theta) = 0.4$ となる．第 2 ピリオドでは $h^2(\theta) = (0.2,1)$ である．同様にして，$g^2(\theta) = 0.4$ となる．第 3 ピリオドでは $h^3(\theta) = (0.2,0.7,1)$ であるから，使用されるパラメータは β_1^3, β_2^3 の 2 つになる．この時の施設の配置位置は同様に中央値を求めて，$g^3(\theta) = 0.7$ となる．以上の結果から，D-GMVS が返す施設の配置位置の組は $G = (0.4, 0.4, 0.7)$ となる，図 3 にこの例を示す．

関連研究について，耐戦略性に関する特徴付けの研究の多様性が示す通り，耐戦略性を満たすメカニズムの特徴付けは重要である．以下では，動的な環境において，匿名性，パレート効率性，耐戦略性の 3 性質を同時に満たすメカニズムの特徴付けを定理 3 で示し，証明を与える．

定理 3. 全てのピリオドで式（1）を満たす D-GMVS は匿名性，パレート効率性，耐戦略性を同時に満たす唯一のメカニズムのクラスである．

この定理を 2 つの補題に分けて証明を行う．

補題 3. 全てのピリオドで式（1）を満たす D-GMVS は匿名性，パレート効率性，耐戦略性を同時に満たす．

証明. D-GMVS が匿名性とパレート効率性を満たすこと

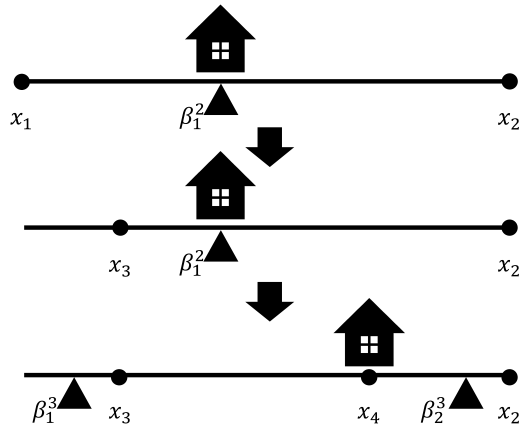

図 3　例 2：黒点はエージェント，三角はパラメータ，家は施設を意味し，上から順に第 1 ピリオド，第 2 ピリオド，第 3 ピリオドの状態を意味する．

は，定理 1 からも明らかである．以下では，全てのピリオドで式（1）を満たす D-GMVS が耐戦略性を満たすか否か議論する．

エージェント i が虚偽のタイプ $\theta'_i = (x'_i, a'_i, d'_i)$ を申告すると仮定する．定理 1 より，GMVS は耐戦略性を満たす．したがって，各ピリオドにおいて i は所在地 x_i を偽る誘因を持たないため，$x'_i \neq x_i$ なる所在地に関する虚偽の申告は行わない．次に $a'_i < a_i$ または，$d'_i > d_i$ なる虚偽の申告を行う場合について考える．この場合において，i は本来そのピリオドに所在地を申告しない．各ピリオドにおける施設の配置位置は独立に決定される．したがって，自身が参加しないピリオドに所在地を申告しても，自身が参加するピリオドの施設の配置位置に影響を及ぼすことはない．最後に $a'_i > a_i$ または $d'_i < d_i$ なる申告を行う場合，$a_i \leq t < a'_i$ または $d'_i < t \leq d_i$ となる $t \in \mathcal{T}$ が存在する．これは，i がピリオド t で所在地を申告しないことに等しい．しかし，定理 2 で式（1）を満たす GMVS が耐秘匿性を満たすことを明らかにした．したがって，i は参加（退出）ピリオドに関して虚偽の申告を行う誘因を持たない．以上より，全てのピリオドで式（1）を満たす D-GMVS は耐戦略性を満たす．□

補題 4. あるピリオドにおいて式（1）を満たす GMVS を用いなければ，匿名性，パレート効率性，耐戦略性を同時には満たさない．

証明. 定理 1 より，GMVS は静的な環境において，匿名性，パレート効率性，耐戦略性の 3 性質を同時に満たす唯一のメカニズムのクラスであるということが知られている．したがって，$\exists t \in \mathcal{T}$ において，GMVS 以外のメカニズムを用いると，いずれかの性質を満たさない．この時，参加するエージェントに時間に関する虚偽の申告を行う誘因を持たせないために，定理 2 より，各ピリオドで式（1）を満たす GMVS を用いる必要がある．以上のことから，補題 4 が成立する．□

本章で議論したのは，動的な環境において，匿名性，パレート効率性，耐戦略性を同時に満たすメカニズムの特徴付けである．しかし，動的な環境においても，匿名性，パレート効率性，耐秘匿性を満たすメカニズムが特徴付けられるか否か不明である．したがって，これを解明することが今後の課題として残されている．

6　ディスカッション

本章ではまず，本モデルにおける制約を緩和することにより，全てのピリオドで式（1）を満たす D-GMVS 以外に匿名性，パレート効率性，耐戦略性を満たすメカニズムが存在することを示す．次に，動的な環境において，社会コストを最小化するメカニズムに関する議論を行う．

6.1　自然な仮定の下で耐戦略性を満たすメカニズム

前章では，動的な環境において，匿名性，パレート効率性，耐戦略性の 3 性質を同時に満たすメカニズムの特徴付けを行った．しかし，現実における問題，例えばネットワーク上における投票を元に意思決定を行う際，各エージェントのログイン時間がメカニズムに参加する時間と対応している場合を考えると，参加時間を偽ることは難しい．なぜなら，ログイン時間を偽ることが可能なエージェントは，本来の参加時間を早めて申告すると推測できるからである．そこで，本節では，以下の仮定を設けることにより，耐戦略性に関する制約を緩和した場合を考える．

仮定 1 (早期参加禁止)**.** $\forall a_i \in \mathcal{T}$ において，$a'_i < a_i$ なる虚偽の申告をエージェントは行わない．

早期参加禁止という仮定の下で，匿名性，パレート効率性，耐戦略性を同時に満たすメカニズムが D-GMVS の他に存在する．そのメカニズムを重み付き中央値メカニズムとして提案する．このメカニズムは，エージェントの所在地の組 $h^t(\theta)$ と，重みと呼ばれる位置の組 $\mathcal{X}$ の中央値を返すメカニズムである．以下に，重み付き中央値メカニズムを定義し，次に動作例を紹介する．

定義 7 (重み付き中央値メカニズム)**.** 重み付き中央値メカニズム $W(= (w^1, \ldots, w^t, \ldots, w^T))$ は以下のルールに従い施設を配置する．

$$\forall \theta \in \Theta, \forall t \in \mathcal{T}, w^t(\theta) := m(h^t(\theta), \mathcal{X})$$

第 2 ピリオド以降で，かつ，あるエージェント $i \in N^t$ において $x_i = w^{t-1}$ となる場合にのみ，$\mathcal{X}$ は $t - t_f$ 個の w^{t-1} の組となる．それ以外の場合には $\mathcal{X}$ は空とする．なお t_f とは w^{t-1} に初めて施設が配置されたピリオドを意味する．しかし，ピリオド t において，施設の配置位置が $w^{t-1} \neq w^t$ となる場合，$t_f = t$ と更新される．

例 3. $T = 3, N = \{1,2,3,4,5\}, \theta_1 = (0,1,1), \theta_2 = (1,1,3), \theta_3 = (0.2,1,2), \theta_4 = (0.9,2,3), \theta_5 = (0.1,3,3)$ の

場合を考える．第 1 ピリオドにおいて $h^1(\theta) = (0, 0.2, 1)$ となる．また，このピリオドでは重みは生じないため，$w^1(\theta) = 0.2$ となる．続いて第 2 ピリオドの場合を考える．この時，$h^2(\theta) = (0.2, 0.9, 1)$ となる，また，$t - t_f = 1$ となるため，$w^1(\theta) = 0.2$ の位置に重みを 1 つ追加する．第 2 ピリオドに参加しているエージェントの所在地と重みの中央値より，施設の配置位置は $w^2(\theta) = 0.2$ となる．次に第 3 ピリオドの場合を考える．この場合，$w^2(\theta) = 0.2$ で所在地を申告するエージェントは存在しないため，重みの追加は行わない．したがって，エージェントの所在地の組である $h^3 = (0.1, 0.9, 1)$ の中央値に施設が配置される．したがって，$w^3(\theta) = 0.9$ となる．以上の結果から，重み付き中央値メカニズムが返す施設の配置位置の組は $W = \{0.2, 0.2, 0.9\}$ となる．図 4 にこの例を示す．

以下では，重み付き中央値メカニズムが，匿名性，パレート効率性，耐戦略性の 3 性質を同時に満たすことを定理 4 で示し，証明を与える．

定理 4. 重み付き中央値メカニズムは，早期参加禁止の仮定の下で匿名性，パレート効率性，耐戦略性を同時に満たす．

証明. 重み付き中央値メカニズムが，匿名性とパレート効率性を満たすことは D-GMVS 同様明らかである．以下では，重み付き中央値メカニズムが耐戦略性を満たすか否か議論する．

$\forall N \subseteq \mathcal{N}, \forall i \in N$ において，i の任意のタイプを $\theta_i = (x_i, a_i, d_i)$ とする．また，時間に関してのみの虚偽の申告を $\theta'_i = (x_i, a'_i, d'_i)$ とする．まず，θ_i と θ'_i を比較することでエージェント i が θ'_i を申告する誘因を持たないことを示す．まず $a'_i > a_i$ の場合を考える．$a_i \le t < a'_i$ なるピリオド $t \in \mathcal{T}$ で $w^t(\theta) = x_i$ となる場合に虚偽の申告を行うと，施設の配置位置は別の位置へ変わりうる．次に，$w^t(\theta) < x_i$ の場合を考える．この時，$NL_{x>w^t(\theta)}(h^t(\theta_{-i}, \theta'_i)) < NL_{x>w^t(\theta)}(h^t(\theta)), NL_{x\le w^t(\theta)}(h^t(\theta_{-i}, \theta'_i)) = NL_{x\le w^t(\theta)}(h^t(\theta))$ となる．したがって施設の配置位置は $w^t(\theta_{-i}, \theta'_i) \le w^t(\theta)$ となる．このことは $w^t(\theta) > x_i$ についても同様である．次に，$a'_i \le t' \le d_i$ なるピリオド $t' \in \mathcal{T}$ について，$x_i = w^{t'}(\theta)$ となり，かつ，$t_f < a'_i$ となる場合を考える．$W(\theta)$ におけるピリオド t' の重みを $\mathcal{X}$ とし，$W(\theta_{-i}, \theta'_i)$ における t' の重みを $\mathcal{X}'$ とすると，$NL_{x=w^{t'}(\theta)}(\mathcal{X}) \ge NL_{x=w^{t'}(\theta)}(\mathcal{X}')$ となるため，施設の配置位置が変わりうる．ピリオド t' について，その他の場合はピリオド t の場合と同様のことが言える．以上より，$a'_i > a_i$ なる虚偽の申告を行うと $c_i(W(\theta)) \le c_i(W(\theta_{-i}, \theta'_i))$ となる． $d'_i < d_i$ の場合についても同様の議論ができる．次に $d'_i > d_i$ なる虚偽の申告を行う場合，補題 3 の証明と同様のことが言える．以上のことから，θ_i と θ'_i を比較して，θ'_i を申告する誘因を持たない．

次に，虚偽の申告のタイプを $\theta''_i = (x'_i, a'_i, d'_i)$ とする．θ'_i と θ''_i を比較して，θ''_i を申告する誘因を持たないことを示す．$a'_i \le t \le d'_i$ なる t において $w^t(\theta_{-i}, \theta'_i) = x_i$ の場合に虚偽の申告を行うと，施設の配置位置は別の位置地へ変わりうる．次に，$w^t(\theta_{-i}, \theta'_i) < x_i$ の場合を考える． $x'_i < w^t(\theta_{-i}, \theta'_i)$ となる場合，$NL_{x>w^t(\theta_{-i},\theta'_i)}(h^t(\theta_{-i}, \theta''_i)) < NL_{x>w^t(\theta_{-i},\theta'_i)}(h^t(\theta))$, $NL_{x\le w^t(\theta_{-i},\theta'_i)}(h^t(\theta_{-i}, \theta''_i)) > NL_{x\le w^t(\theta_{-i},\theta'_i)}(h^t(\theta_{-i}, \theta'_i))$ より，$w^t(\theta_{-i}, \theta''_i) \le w^t(\theta_{-i}, \theta'_i))$ となる．また，$x'_i \ge w^t(\theta_{-i}, \theta'_i)$ の場合，$NL_{x\ge w^t(\theta_{-i},\theta'_i)}(h^t(\theta_{-i}, \theta''_i)) = NL_{x\ge w^t(\theta_{-i},\theta'_i)}(h^t(\theta_{-i}, \theta'_i)), NL_{x\le w^t(\theta_{-i},\theta'_i)}(h^t(\theta_{-i}, \theta''_i)) = NL_{x\le w^t(\theta_{-i},\theta'_i)}(h^t(\theta_{-i}, \theta'_i))$ より施設の配置位置は，$w^t(\theta_{-i}, \theta''_i) = w^t(\theta_{-i}, \theta'_i)$ となる．これらの場合において i のコストは $c_i(W(\theta_{-i}, \theta'_i)) \le c_i(W(\theta_{-i}, \theta''_i))$ となる．$w^t(\theta_{-i}, \theta'_i) > x_i$ の場合も同様の議論が可能である．したがって，θ'_i と θ''_i を比較して θ''_i を申告する誘因を持たない．

以上より，重み付き中央値メカニズムは早期参加禁止の仮定の下で耐戦略性を満たすことが示せた． □

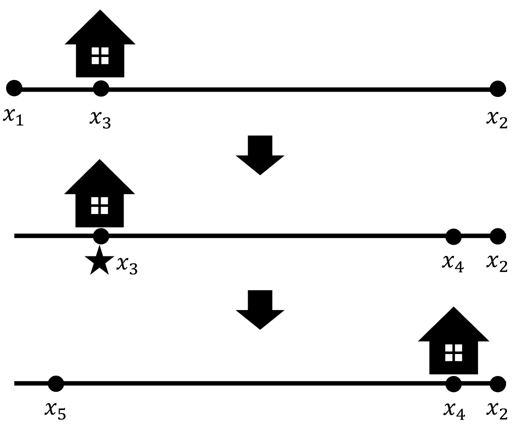

図 4　例 3：黒点はエージェント，星印は重み，家は施設を意味し，上から順に第 1 ピリオド，第 2 ピリオド，第 3 ピリオドの状態を意味する．

本モデルの制約を緩和することにより，全てのピリオドにおいて式（1）を満たす D-GMVS 以外に，匿名性，パレート効率性，耐戦略性の 3 性質を同時に満たすメカニズムが存在することを示した．しかし，D-GMVS と比較して，重み付き中央値メカニズムがより優れた性質を持つか否か不明である．

6.2　動的な環境において社会コストを最小化するメカニズム

本節では，動的な環境において，社会コストを最小化するメカニズムを示し，そのメカニズムはランニングコストの面においては最適でないことを示す．社会コストは，メカニズムに参加するエージェント全員の所在地と施設の配置位置との距離の総和を示し，ランニングコストは，各ピリオドにおける施設の総移動距離を示す．社会コストを最小化することにより，社会全体の効率を高めることができる．

また，ランニングコストを最小化することで，施設を移動させるコストを最小に抑えることができる．社会コストの定義を，$SC(f(\theta)) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{x_i \in N^t} |x_i - f^t(\theta)|$ とし，ランニングコストの定義を $RC(f(\theta)) = \sum_{t=1}^{T-1} |f^t(\theta) - f^{t+1}(\theta)|$ とする．

静的な環境において，GMVS のクラスに含まれる中央値メカニズムが社会コストを最小化することが文献 [7] で示された．動的な環境においても，各ピリオドで中央値メカニズムを用いるメカニズム（動的中央値メカニズム）が，社会コストを最小化する．

しかし，動的中央値メカニズムはランニングコストの面において最適でない．例えば，各ピリオドにおいて中央値が左右に大きく動く場合，施設の配置位置を各ピリオドでエージェントの所在地の最左値に配置するメカニズム（動的最左値メカニズム）の方が，中央値メカニズムと比べてランニングコストを小さくできると容易に推測できる．今後の課題として，動的な環境において，ランニングコストを最小化するメカニズムの解明が残されている．

7　結論

本論文では，動的な環境において，各ピリオドで直線上に 1 つの施設を配置する施設配置問題を考えた．また，$T = 1$ の場合を特殊なケースとして，静的な環境と同等に扱った．この静的な環境において，匿名性，パレート効率性，耐戦略性を同時に満たす GMVS がさらに耐秘匿性を満たす必要十分条件を解明した．続いて，動的な環境において，式（1）を満たす D-GMVS が匿名性，パレート効率性，耐戦略性を同時に満たすことの特徴付けを行った．次に，自然な仮定を設け，本モデルにおける制約を緩和した場合，式（1）を満たす D-GMVS の他にも，匿名性，パレート効率性，耐戦略性を同時に満たすメカニズムが存在することを示した．最後に，動的中央値メカニズムが社会コストを最小化することを述べた．

以下に今後の課題を述べる．著者らの知る限り静的な環境，および動的な環境において，耐秘匿性を満たすメカニズムの特徴付けは未だ行われていない．したがって，匿名性，パレート効率性，耐秘匿性を同時に満たすメカニズムの特徴付けを行う必要がある．また，D-GMVS と比較して，重み付き中央値メカニズムが優れている性質を解明する必要がある．今回は施設の配置位置の適切さを計る評価指標にパレート効率性を導入したが，その他の指標としてランニングコストを考える必要がある．その場合において，ランニングコストを最小化するメカニズムの提案が今後の課題として残されている．

謝辞

本研究は JSPS 基盤研究 (A)（課題番号 17H00761）および若手研究 (A)（課題番号 17H04695）の助成を受けました．深く感謝致します．

参考文献

[1] 栗田治.: 施設配置モデル: 配置問題と社会の公平さ, オペレーションズ・リサーチ: 経営の科学, Vol.42, No.12, pp. 782–784 (1997)

[2] 坂井豊貴, 藤中裕, 若山琢磨.: メカニズムデザイン: 資源配分制度の設計とインセンティブ, ミネルヴァ書房 (2008)

[3] Ariel D. Procaccia and Moshe Tennenholtz.: Approximate Mechanism Design without Money, in ACM Trans. Economic and Comput, Vol. 1, No. 4, pp. 18:1–18:26 (2013)

[4] David C Parkes.: Online mechanisms, Cambridge University Press (2007)

[5] Elad Dokow, Michal Feldman, Reshef Meir, and Ilan Nehama .: Mechanism design on discrete lines and cycles, in Proceedings of the 13th ACM Conference on Electronic Commerce, pp. 423–440 (2012)

[6] Hans Peters, Hans van der Stel, and Ton Storcken.: Pareto optimality, anonymity, and strategy-proofness in location problems, in International Journal of Game Theory, Vol. 21, No. 3, pp. 221–235 (1992)

[7] Hervé Moulin.: On strategy-proofness and single peakedness, in Public Choice, Vol. 35, No. 4, pp. 437–455 (1980)

[8] Hervé Moulin.: Condorcet's principle implies the no show paradox, in Journal of Economic Theory, Vol. 45, No.1, pp.53–64 (1988)

[9] James Schummer and Rakesh V Vohra.: Mechanism design without money, in Algorithmic Game Theory, Vol. 10, pp. 243–299 (2007)

[10] Jinpeng Ma.: Strategy-proofness and the strict core in a market with indivisibilities, in International Journal of Game Theory, Vol. 23, No. 1, pp. 75–83 (1994)

[11] Oliver Bochet and Sidartha Gordon.: Priorities in the multiple public facilities, in Games and Economic Behavior, Vol. 74, No. 1, pp. 52–67 (2012)

[12] Roger B Myerson.: Optimal auction design, in Mathematics of operations research, Vol. 6, No. 1, pp. 58–73 (1981)

[13] Taiki Todo, Atsushi Iwasaki, and Makoto Yokoo.: False-name-proof mechanism design without money, in The 10th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems, Vol. 2, pp. 651–658 (2011)

[14] Taiki Todo, Takayuki Mouri, Atsushi Iwasaki, and Makoto Yokoo.: False-name-proofness in online mechanisms, in International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems, Vol. 3, pp. 753–762 (2012)