CA-001

単位円グラフ上での高連結度支配集合問題に対する主双対近似アルゴリズム

福永拓郎 *

1　はじめに

無線アドホックネットワークとは，自由に動くことができる端末によって無線通信を用いて自己構成されるネットワークのことである．伝統的なネットワークと違い基地局やルータなどのインフラを必要としないことから，センサーや自動車間の通信や，災害現場での利用などに有効な技術である．その利点の一方で，無線アドホックネットワークの効率的な運用のためには様々な技術的課題が存在する．課題の一つが，フラッディングによって生じる冗長な通信の削減である．無線アドホックネットワークでは，ネットワーク全体の情報を管理することが難しいため，ある端末から別の端末にメッセージが送信されるときには，メッセージをネットワーク内の全ての端末に送信するフラッディングを行うことが一般的である．フラッディングには，冗長な通信が発生するためにネットワークの効率性が損なわれるという欠点がある．

フラッディングに伴う冗長な通信を削減するためにとられる代表的な施策として，**仮想バックボーンネットワーク**の利用がある．仮想バックボーンネットワークでは，ネットワークから幾つかのバックボーン端末を選び，それらの端末から構成される部分ネットワークを構築する．メッセージがアドホックネットワーク上で送信されるとき，仮想バックボーンネットワークを利用した通信では，次のようにメッセージの伝達が行われる．まず，送信元の端末は，隣接するいずれかのバックボーン端末にメッセージを伝達する．次に，メッセージを受け取ったバックボーン端末は，仮想バックボーンネットワーク上でメッセージのフラッディングを行う．最後に，送信先の端末に隣接するバックボーン端末が，受け取ったメッセージを送信先端末に伝達する．この手法を用いるためには，まずネットワークの全ての端末がバックボーン端末として選ばれるか，いずれかのバックボーン端末に隣接している必要がある．また同時に，通信の安定性の確保のため，仮想バックボーンネットワークの頑健性も重要になる．一方で，通信の効率性を改善するためには，仮想バックボーンネットワークは小さければ小さいほど良い．

仮想バックボーンネットワークを構築するアルゴリズムについては多くの研究がこれまでなされている．その多くでは，無線ネットワーク全体を無向グラフとして，仮想バックボーンネットワークを無向グラフの**連結支配集合**としてモデル化するアプローチが取られている．無向グラフの連結支配集合とは，次のような条件を満たす頂点集合のことを指す．無向グラフの全ての頂点全体から成る集合を V とする．S を V の部分集合とする．$V \setminus S$ の各頂点が S に含まれる頂点の少なくとも 1 つと隣接しているとき，S を**支配集合**という．さらに，S によって誘導される部分グラフ（頂点集合 S と両端点が S に含まれる辺全てからなる部分グラフ）が連結であるとき，S は連結支配集合と呼ばれる．上記のアプローチでは，与えられた無向グラフの最小サイズや最小重みの連結支配集合を求めるアルゴリズムを与え，これを用いて仮想バックボーンネットワークを求める．中でも特に，無線ネットワークを表す無向グラフは単位円グラフであるという仮定が広く受け入れられている．最小サイズの連結支配集合を求める問題は単位円グラフ上でも NP 困難であることが知られている [2]．このことから，最適解を求めるのではなく，多項式時間で近似解を求める近似アルゴリズムの研究が主流である．

連結支配集合はネットワークとしては頑健性に欠ける場合がある．これは連結支配集合が，仮想バックボーンネットワークの連結性と，各端末がバックボーン端末の少なくとも一つと隣接するという 2 つの性質しか担保しないからである．例えば，バックボーン端末の一つが欠損したときに，仮想バックボーンネットワーク全体が非連結になったり，バックボーンではない端末が仮想バックボーンネットワークへの接続を失ったりしてしまうことがある．この欠点を克服するため，Dai と Wu [3] は連結支配集合の代わりに **k 連結 k 支配集合**を用いることを提案した．k 連結 k 支配集合とは，次の条件を満たす

* 国立情報学研究所．JST, ERATO, 河原林巨大グラフプロジェクト．takuro@nii.ac.jp

頂点集合 S のことである．まず，S によって誘導される部分グラフが k 連結である（つまり，どの $k-1$ 頂点を取り除いても連結となっている）とき，S は k **連結である**といわれる．$V \setminus S$ 内の任意の頂点が S に含まれる隣接点を k 個以上持つとき，S は k **支配集合**と呼ばれる．S が k 連結でありかつ k 支配集合となっている場合，k 連結 k 支配集合と呼ばれる．Dai と Wu の研究以来，k 連結 k 支配集合をより一般的化した k 連結 m 支配集合について，研究がされている．

単位円グラフでの最小サイズ k 連結 m 支配集合を求める問題を**重みなし k 連結 m 支配集合問題**と呼ぶ．各頂点が非負の重みを与えられていて，最小重みの k 連結 m 支配集合を求める問題を**重み付き k 連結 m 支配集合問題**と呼ぶ．これらの問題に対しては，重みなしの場合は $k \leq 3$ の場合について，重み付きの場合は $k = m = 1$ の場合についていくつかの定数近似アルゴリズムが知られている．（重みし問題については [6, 8, 10, 11, 13]，重み付き問題については [1, 12, 14] を参照）．しかし，重みなし k 連結 m 支配集合問題の $k \geq 4$ の場合と，重み付き k 連結 m 支配集合問題の $(k, m) \neq (1, 1)$ の場合に対して，定数近似アルゴリズムが存在するかどうかが自然な疑問として残っていた．重みなし問題については，[10] と [11] においてすでにこの疑問について触れられている．

1.1 研究成果

著者は論文 [4] で，単位円グラフ上の k 連結 m 支配集合問題に対する二つのアルゴリズムを与えた．これらのアルゴリズムはどちらも，$k \leq m$ を満たすことを仮定する．アルゴリズムの一つは重みなし問題に対してのみ定義され，この問題に対する $O(5^k k!)$ 近似アルゴリズムとなっている．もう一方は重み付き問題に対する $O(k^2 \log k)$ 近似を達成する．どちらのアルゴリズムも，k が定数の場合，近似比が定数となる．前者のアルゴリズムは後者と比べて近似比が劣っている上に，重みなし問題に対してのみ適用できるため適用範囲が狭い．しかし，前者のアルゴリズムはより単純で解析が簡単であり，かつ単位円グラフ以外のいくつかのグラフクラスにも適用可能であるという利点がある．実際，$k \in \{2, 3\}$ の場合には，前者のアルゴリズムは [6, 11] で与えられたアルゴリズムにより詳細な動作の定義を導入して得られるものとなっており，我々の解析は [6, 11] のアルゴリズムが定数近似を達成することのより単純な証明を与えたことになる．

論文 [4] とほぼ同時に，Shi, Zhang, Du [7] も単位円グラフ上の重み付き k 連結 m 支配集合問題に対して $O(k^2 \log k)$ 近似アルゴリズムを与えた．彼らの研究は著者の研究とは独立して行われたものである．その後，論文 [7] のジャーナル版として [9] が出版されている．著者のアルゴリズムと Shi らのアルゴリズムはどちらも，最初に m 支配集合を計算し，それにさらに頂点を付け加えることで k 連結 m 支配集合を構築する．最初のステップではどちらも，最小重み m 支配集合問題に対する近似アルゴリズムを利用するが，Shi らは [7] でこのステップのために，[12] で与えられたアルゴリズムを利用することを提案している．しかし，[12] のアルゴリズムは最小重み m 支配集合問題とはやや異なる問題を扱っており，m 支配集合を求めることには利用できない．論文 [4] で著者は最小重み m 支配集合を求める初めての近似アルゴリズムを与えており，Shi らのアルゴリズムはこれを利用しなければ主張通りの近似比を達成できない．Shi らはジャーナル版 [9] では，最初のステップのために [4] のアルゴリズムを利用することを提案している．m 支配集合を k 連結 m 支配集合へと変換するステップでは，Shi ら [7, 9] と [4] は異なるアプローチを取っている．[4] では連結度増大問題と呼ばれる問題に対して $O(k^2)$ 近似アルゴリズムを与え，それを繰り返し適用することで m 支配集合を k 連結にする．一方，Shi らは問題を一種の辺重み付きネットワーク設計問題に帰着することで同様の目的を達成している．

本稿では，論文 [4] で与えた重み付き k 連結 m 支配集合問題に対する $O(k^2 \log k)$ 近似アルゴリズムについて解説する．

2 準備

$G = (V, E)$ を頂点集合 V，辺集合 E を持つ無向グラフとする．$|V|$ を n で表す．$X \subseteq V$ に対し，$G[X]$ を X によって誘導される G の部分グラフとする．各頂点がユークリッド平面上に配置され，二つの頂点間の距離が単位距離以下であることと頂点間に辺が存在することが必要十分であるとき，G を単位円グラフと呼ぶ．

$X \subseteq V$ に対し，X の隣接頂点の集合を $\Gamma(X)$ で表す．つまり，$\Gamma(X) = \{v \in V \setminus X \colon uv \in E, \exists u \in X\}$ となる．X^+ で $X \cup \Gamma(X)$ を表す．$X, T \subseteq V$ に対し，$\Gamma(X) \cap T$ を $\Gamma_T(X)$ と記述する．

$X \subseteq V$ とする．$T \subseteq V$ に対して，$X \cap T \neq \emptyset \neq T \setminus X^+$ が成り立つとき，X を T **カット**と呼ぶ．T カット X が頂点 $r \in T$ に対し $r \notin X^+$ を満たすとき，X を (T, r) **カット**と呼ぶ．グラフ G から任意の $k-1$ 頂点を取り除いても連結であるとき，G は k 連結であると呼ばれる．ただし，グラフの頂点数が k 以下であるときには，完全グラフであるときのみ k 連結であるとする．メンガーの定理より，グラフ G が k 連結であることの

必要十分条件は $X \neq \emptyset$，$X^+ \neq V$ であるような任意の $X \subseteq V$ について $|\Gamma(X)| \geq k$ となることである．V の部分集合 T が k 連結となるための必要十分条件は，任意の T カット X に対して $|\Gamma_T(X)| \geq k$ であることである（T の k 連結性は $G[T]$ の k 連結性によって定義したことを思い出されたい）．

我々のアルゴリズムでは，最初に m 支配集合を求めた後，その連結度を頂点を加えることで k 以上にする．後者のステップは，次の問題を繰り返し解くことによって実現する．

定義 1 (連結度増大問題)**.** 無向グラフ $G = (V, E)$，各頂点 $v \in V$ の非負重み $w(v)$，G の $k-1$ 連結 m 支配集合 T が与えられたとき，$T \cup S$ が k 連結であるような $S \subseteq V \setminus T$ のうち，重み $\sum_{v \in S} w(v)$ が最小となるようなものを求めよ．

3 アルゴリズム

本章では，重み付き k 連結 m 支配集合問題に対する $O(k^2 \log k)$ 近似アルゴリズムを与える．これまでにも述べたとおり，本アルゴリズムでは最初のステップで m 支配集合を求めた後，連結度増大問題を繰り返し解くことによって k 連結 m 支配集合へと変換する．本稿では紙面の制約上，連結度増大問題を解くために用いられる主双対近似アルゴリズムについて紹介する．本章を通じて，$m \geq k$ を仮定する．

$G = (V, E)$ を入力の無向グラフ，T を G の m 連結 $k-1$ 支配集合とする．T は $k-1$ 連結であるので，任意の T カット X は $|\Gamma_T(X)| \geq k-1$ を満たす．メンガーの定理より，$S \subseteq V \setminus T$ が実行可能解であることの必要十分条件は，$|\Gamma_T(X)| = k-1$ であるような任意の T カット X について $S \cap \Gamma(X) \neq \emptyset$ を満たすことである．

以降では，根頂点 $r \in T$ を選び，$|\Gamma_T(X)| = k-1$ であるような任意の (T, r) カット X について $S \cap \Gamma(X) \neq \emptyset$ を満たすような最小重み頂点集合 $S \subseteq V \setminus T$ を求める問題を考える．この問題を k 個の異なる根頂点について解き，得られた解の集合和を返すことによって連結度増大問題に対する解が得られることが知られている．$|\Gamma_T(X)| = k-1$ を満たす (T, r) カット X のことを**要求カット**と呼び，$\mathcal{D}$ で全ての要求カットから成る族を表す．

問題は，以下の線形計画問題に緩和できる．

$$
\begin{array}{lll}
\text{最小化} & \sum_{v \in V \setminus T} w(v)x(v) & \\
\text{制約} & \sum_{v \in \Gamma(X) \setminus T} x(v) \geq 1, & \forall X \in \mathcal{D}, \\
 & x(v) \geq 0, & \forall v \in V \setminus T.
\end{array} \tag{1}
$$

この線形計画問題の双対問題は以下のようになる．

$$
\begin{array}{lll}
\text{最大化} & \sum_{X \in \mathcal{D}} y(X) & \\
\text{制約} & \sum_{X \in \mathcal{D}: v \in \Gamma(X)} y(X) \leq w(v), & \forall v \in V \setminus T, \\
 & y(X) \geq 0, & \forall X \in \mathcal{D}.
\end{array} \tag{2}
$$

頂点 $v \in V \setminus T$ が $v \in \Gamma(X)$ を満たすとき，v は要求カット X を**被覆する**といい，頂点集合 S が要求カット X を被覆するような頂点を含んでいるとき，S は X を被覆するという．

$\mathcal{F}$ を $\mathcal{D}$ の部分族とする．任意の $X, Y \in \mathcal{F}$ について $X \cap Y, X \cup Y \in \mathcal{F}$ または $X \setminus Y^+, Y \setminus X^+ \in \mathcal{F}$ が成り立つとき，$\mathcal{F}$ は非交差可能と呼ぶ．また，$X \cap Y \cap T \neq \emptyset$ であるような任意の $X, Y \in \mathcal{F}$ について $X \cap Y, X \cup Y \in \mathcal{F}$ が成り立つとき，$\mathcal{F}$ は T **交差**という．

以下では，$\mathcal{D}$ が T 交差であり非交差可能であるという仮定のもと，連結度増大問題に対する定数近似アルゴリズムを与える．一般的に，$\mathcal{D}$ 自体は T 交差であったり非交差可能であったりはしない．しかし，Nutov [5] による分解定理を用いることで，このアルゴリズムを $O(k)$ 回利用することで一般のケースの連結度増大問題に対する近似アルゴリズムが得られることが知られている．

要求カット族 $\mathcal{D}$ が T 交差であり非交差可能である場合の連結度増大問題に対するアルゴリズムについて説明する．アルゴリズムは，増加フェーズと削除フェーズの二つから成る．増加フェーズでは，次の二つの変数を管理する．

- 双対変数 y．最初に $y(X) := 0$（$X \in \mathcal{F}$）で初期化し，増加フェーズの間 y は常に (2) について実行可能解となるようにする．
- 解 $S \subseteq V \setminus T$．最初に $S := \emptyset$ となるよう初期化する．S が全ての要求カットを被覆するとき，増加フェーズを終了する．

$S \subseteq V$ に対し，$\mathcal{D}_S$ を $\{X \in \mathcal{D} \colon S \cap \Gamma(X) = \emptyset\}$ と定義する．増加フェーズでは，$\mathcal{D}_S$ の極小要求カット X に対する双対変数 $y(X)$ を全て同時に同じ速度で増加させる．ある頂点 $v \in V \setminus (T \cup S)$ について $\sum_{X \in \mathcal{D} \colon v \in \Gamma(X)} y(X) = w(v)$ が成立したとき，双対変数の増加を止め，v を S に加える．この更新のあと，S が全ての要求カットを被覆してたら，増加フェーズを終了する．そうでない場合は，増加フェーズの次の反復に移る．定義より，y は常に (2) の実行可能解であり，増加フェーズが終了したときには S はすべての要求カットを被覆している．

削除フェーズでは，S から頂点を取り除くことで極小な $\mathcal{D}$ の被覆へと変更する．増加フェーズ終了時に

$S = \{v_1, \ldots, v_{|S|}\}$ が成り立つとし，v_i を増加フェーズで i 番目に S に加わった頂点だとする．削除フェーズでは，添字が大きい方から小さい方へと順番に頂点 v_i を削除するかどうかを決める．もし $S \setminus \{v_i\}$ が全ての要求カットを被覆しているならば，v_i は S から取り除かれる．$\tilde{S}$ を，削除フェーズが終了したときの S とする．アルゴリズムは $\tilde{S}$ を解として出力する．

定理 1. 根頂点 r を固定したときの要求カット族 $\mathcal{D}$ が T 交差かつ非交差可能であるとき，$\sum_{v\in\tilde{S}} w(v)$ が (1) の最適値の 15 倍以下であり，かつ全ての要求カットを被覆するような頂点集合 $\tilde{S} \subseteq V$ を計算する多項式時間アルゴリズムが存在する．

以上の定理の系として，次のようなものが得られる．

系 1. 連結度増大問題に対する $O(k^2)$ 近似アルゴリズムが存在する．特にこのアルゴリズムは，$\sum_{v\in S} w(v)$ が (1) の最適値の高々 $O(k^2)$ 倍であるような解 S を出力する．

系 2. k 連結 m 支配集合問題に対する $O(k^2 \log k)$ 近似アルゴリズムが存在する．

紙面の都合上， 証明は省略する．

4　結論

本稿では，論文 [4] で与えた単位円グラフに対する重み付き k 連結 m 支配集合問題に対する $O(k^2 \log k)$ 近似アルゴリズムについて紹介した．このアルゴリズムは，$k+1 < m$ の場合，m 支配集合を求めるために楕円体法を用いる必要がある．しかしながら，楕円体法は実用的ではないと広く考えられており，今後の重要な課題として，楕円体法に依らずに最小重み m 支配集合を求めるアルゴリズムの開発が挙げられる．

参考文献

[1] C. Ambühl, T. Erlebach, M. Mihalák, and M. Nunkesser. Constant-factor approximation for minimum-weight (connected) dominating sets in unit disk graphs. In *APPROX-RANDOM*, 3–14, 2006.

[2] B.N. Clark, C.J. Colbourn, and D.S. Johnson. Unit disk graphs. *Disc. Math.*, 86:165–177, 1990.

[3] F. Dai and J. Wu. On constructing k-connected k-dominating set in wireless ad hoc and sensor networks. *J. Parall. Distr. Comp.*, 66:947–958, 2006.

[4] T. Fukunaga. Constant-approximation algorithms for highly connected multi-dominating sets in unit disk graphs. *CoRR*, abs/1511.09156, 2015.

[5] Z. Nutov. Approximating minimum-cost connectivity problems via uncrossable bifamilies. *ACM Trans. Alg.*, 9:1, 2012.

[6] W. Shang, F. Yao, P. Wan, and X. Hu. On minimum m-connected k-dominating set problem in unit disc graphs. *J. Comb. Opt.*, 16:99–106, 2008.

[7] Y. Shi, Z. Zhang, and D.-Z. Du. Approximation algorithm for minimum weight (k, m)-cds problem in unit disk graph. *CoRR*, abs/1508.05515, 2015.

[8] Y. Shi, Y. Zhang, Z. Zhang, and W. Wu. A greedy algorithm for the minimum 2-connected m-fold dominating set problem. *J. Comb. Opt.*, 31:136–151, 2016.

[9] Y. Shi, Z. Zhang, Y. Mo, and D.-Z. Du. Approximation algorithm for minimum weight fault-tolerant virtual backbone in unit disk graphs. *IEEE/ACM Trans. Netw.*, 25:925–933, 2017.

[10] W. Wang, D. Kim, M. An, W. Gao, X. Li, Z. Zhang, and W. Wu. On construction of quality fault-tolerant virtual backbone in wireless networks. *IEEE/ACM Trans. Netw.*, 21:1499–1510, 2013.

[11] W. Wang, B. Liu, D. Kim, D. Li, J. Wang, and Y. Jiang. A better constant approximation for minimum 3-connected m-dominating set problem in unit disk graph using Tutte decomposition. In *INFOCOM*, 1796–1804, 2015.

[12] J. Willson, Z. Zhang, W. Wu, and D.-Z. Du. Fault-tolerant coverage with maximum lifetime in wireless sensor networks. In *INFOCOM*, 1364–1372, 2015.

[13] Z. Zhang, J. Zhou, Y. Mo, and D.-Z. Du. Performance-guaranteed approximation algorithm for fault-tolerant connected dominating set in wireless networks. In *INFOCOM*, 1–8, 2016.

[14] F. Zou, X. Li, S. Gao, and W. Wu. Node-weighted Steiner tree approximation in unit disk graphs. *J. Comb. Opt.*, 18:342–349, 2009.