

## 離散的有限フレネル変換の画像符号化への応用 Application of the discrete Fresnel transform to image coding

青柳 智裕 大坪 紘一 青柳 宣生  
Tomohiro Aoyagi Kouichi Ohtsubo Nobuo Aoyagi

### 1.はじめに

光学系における基本的な回折変換はレーリー回折であるが、実際には近似回折変換としてフレネル回折が用いられる。フレネル回折は積分の形で表され、フレネル変換として定義され、これまでその数学的な性質が研究されてきた[1]。また光学的な画像処理、データ処理や光アナログ演算などに応用されてきた。一般的な光学系においては、なんらかの形で光の伝播を遮る空間的な帯域制限が存在する。このような有限開口の効果をフレネル回折について考慮すると、フレネル変換に対する標準化定理が導出できる。この標準化定理を基礎として離散的有限フレネル変換が導出することができる。

近年、計算機のハードウェア技術や通信技術の急速な発達により、扱われる情報は大容量化し、通信や蓄積のために情報を圧縮する技術が研究されてきている。特に画像は効率よく近似する情報圧縮技術が必要とされている。

画像符号化の際使われている離散的関数変換は離散コサイン変換(DCT)やウェーブレット変換(WT)に基づくものであり、画像を効率よく圧縮するために画像を小ブロックに分割して、各ブロックごとに圧縮する方法が取られることが多い。画像の持つ2次元あるいは3次元相関性を積極的に利用することにより、高い符号化効率を得られるが、離散的関数変換に必要な演算処理回数が多いという問題点もある[4-7,10,11]。通常関数変換を使って符号化を行うには、量子化手法と組み合わせることになる。近年よく使われている量子化手法はベクトル量子化(Vector Quantization;VQ)[2,3]やBTC(Block Truncation coding)[8]アルゴリズムなどがある。ベクトル量子化は複数のサンプルをまとめてベクトルとして量子化することによってサンプル間の冗長度を情報圧縮に利用するものである。BTCアルゴリズムは濃淡の分布を小ブロックに分割し、各ブロックを二つの濃淡値で近似する方法である。

本研究では、離散フレネル変換を導出し、画像を小ブロックに分割してから離散フレネル変換を行い、その変換係数に対してベクトル量子化とBTCアルゴリズムを適用してその再構成画像に対して画質の評価を行った。

### 2. 離散的フレネル変換

まず、議論を簡単にするために、フレネル回折の入出力空間を1次元として、振幅透過率 $f(\xi)$ を持つ物体に、光が入射したとき、そこから距離 $z$ だけ離れた観測面上での光の振幅透過率を $F(x, z)$ とする。フレネル近似のもとで $F(x, z)$ は次のように表すことができる。

$$F(x, z) = \frac{1}{\sqrt{i2\pi z}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \exp\left\{\frac{i}{2z}(x - \xi)^2\right\} d\xi \quad (1)$$

ここで光の波数は1とした。フレネル逆変換は次式で与えられる。

$$f(\xi) = \sqrt{\frac{i}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, z) \exp\left\{-\frac{i}{2z}(x - \xi)^2\right\} dx \quad (2)$$

今 $F(x, z)$ が空間的に帯域制限されていて、 $-a \leq x \leq a$ でのみ零以外の値をとるとすると、次の標準化展開式が成立する。

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kX) \times \frac{\sin\pi\left(\frac{x}{X} - k\right)}{\pi\left(\frac{x}{X} - k\right)} \exp\left\{\frac{i}{2z}(k^2 X^2 - x^2)\right\} \quad (3)$$

ここで、 $X = \pi z/a$ である。

$f(\xi)$ を $X$ の間隔で標準化すると、式(2)から

$$f(kX) = \sqrt{\frac{i}{2\pi z}} \exp\left(-\frac{ik^2 X^2}{2z}\right) \times \int_{-\infty}^{\infty} F(x, z) \exp\left\{-\frac{i}{2z}(x^2 - 2kXx)\right\} dx \quad (4)$$

ここで、 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ である。

式(4)の積分範囲を $2\pi z/X$ の間隔で離散化すると、

$$f(kX) = \sqrt{\frac{i}{2\pi z}} \exp\left(-\frac{ik^2 X^2}{2z}\right) \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{2m\pi z}{X}}^{\frac{2(m+1)\pi z}{X}} F(x, z) \exp\left\{-\frac{i}{2z}(x^2 - 2kXx)\right\} dx \quad (5)$$

ここで、

$$F_q(x, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F\left(x + \frac{2m\pi z}{X}\right) \times \exp\left\{-\frac{i}{2z}\left(x + \frac{2m\pi z}{X}\right)^2\right\} \quad (6)$$

と置くと、式(5)は次のようになる。

$$f(kX) = \sqrt{\frac{i}{2\pi z}} \exp\left(-\frac{ik^2 X^2}{2z}\right) \int_{-\infty}^{\infty} F_q(x, z) \exp\left(\frac{ikXx}{z}\right) dx \quad (7)$$

$F_q(x, z)$ は、 $2\pi z/X = 2a$ を周期とする周期関数となるから、フーリエ級数展開できて、

$$F_q(x, z) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} C_n \exp\left(-\frac{i\ell\pi x}{a}\right) = \frac{X}{\sqrt{i2\pi z}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} f(\ell X) \exp\left\{\frac{i}{2z}(x - \ell X)^2\right\} \exp\left(-\frac{ix^2}{2a}\right) \quad (8)$$

$$C_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a F_q(x, z) \exp\left(\frac{i\ell\pi x}{a}\right) dx$$

となる。

さらに、 $F_q(x, z)$ を $X$ の間隔で標準化し、 $z = NX^2/2\pi$ ( $N$ は自然数)と置くと

$$F_q(\ell X) = F_q\left(\ell X, \frac{NX^2}{2\pi}\right)$$

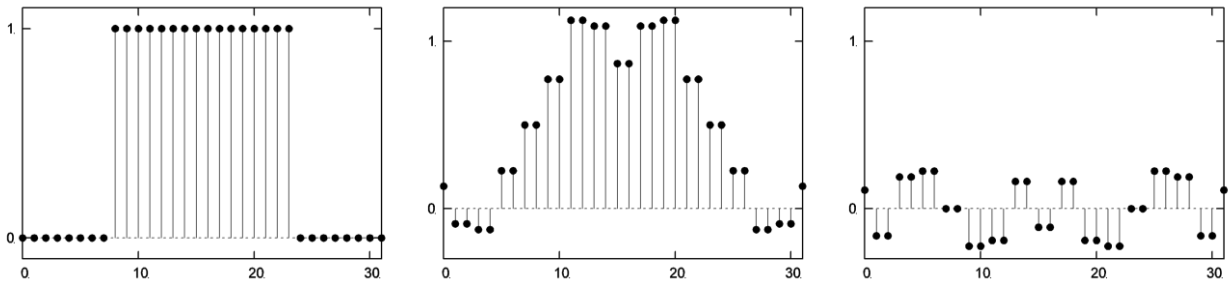


Fig. 1 Example plots showing discrete Fresnel transform. Left is the rectangular pulse of 32 points. Center is real part of discrete Fresnel transform. Right is imaginary part of that.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{iN}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kX) \exp\left\{\frac{i\pi}{N}(k-\ell)^2\right\} \exp\left(-\frac{i\pi\ell^2}{N}\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{iN}} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(kX + mNX) \\
 &\quad \times \exp\left\{\frac{i\pi}{N}(k-\ell)^2\right\} \exp\left(-\frac{i\pi\ell^2}{N} + i\pi m^2 N\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{iN}} \sum_{k=0}^{N-1} f_p(kX) \exp\left\{\frac{i\pi}{N}(k-\ell)^2\right\} \exp\left(-\frac{i\pi\ell^2}{N}\right) \quad (9)
 \end{aligned}$$

となる。  
ここで、

$$f_p(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m^2 N} f(x + mNX) \quad (10)$$

と置く。  
今、次のように考える。

$$\begin{aligned}
 F_p(x) &= \exp\left(\frac{i\pi x^2}{NX^2}\right) F_q(x) \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} F\left(x + mNX, \frac{NX^2}{2\pi}\right) \exp\left\{-i\pi N\left(m^2 + \frac{2mx}{NX}\right)\right\} \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$G(\ell) = \frac{1}{\sqrt{iN}} \sum_{k=0}^{N-1} g(k) \exp\left\{\frac{i\pi}{N}(k-\ell)^2\right\} \quad (12)$$

$(\ell = 0, 1, 2, \dots, N-1)$

ただし、 $G(\ell) = F_p(\ell X)$ 、 $g(k) = f_p(kX)$ と置いた。  
逆変換が存在して、次のようになる。

$$g(k) = \sqrt{\frac{i}{N}} \sum_{\ell=0}^{N-1} G(\ell) \exp\left\{-\frac{i\pi}{N}(k-\ell)^2\right\} \quad (13)$$

$(k = 0, 1, 2, \dots, N-1)$

式(12)と(13)をそれぞれ離散的フレネル変換(Discrete Fresnel transform)と逆変換という。式(13)の逆変換の変換核は式(12)においてNを-Nと置いたものに等しい。

Fig. 1は、32点の単位ステップ信号[13]を離散フレネル変換した時の例である。単位ステップ信号を離散フレネル変換したときの実数部と虚数部を表示した。

### 3. 量子化手法

ベクトル量子化や BTC アルゴリズムは、先ず、画像を大きさ  $n \times n$  の小ブロックに分割し、各ブロックを独立に符号化する。

#### 3.1 ベクトル量子化

ベクトル量子化では、複数のサンプルがベクトルとしてまとめて量子化される。つまり代表的なベクトルのパターンを有限個用意しておき、入力ベクトルに対して、そのベクトルに最も距離が近い量子化代表ベクトルを選択して、そのインデックスを2進符号化する。

ベクトル量子化の一つである LBG アルゴリズム[3]について述べる。この手法は、クラスタリングの K-means 法と同等のものである[14,15]。

今、あるベクトル  $\mathbf{x} \in X$  をあるクラスタ集合  $P_i$  ( $i$  は自然数とする) に分類する問題を考える。クラスタの中心は  $\mathbf{p}_i \in P_i$  とする。

Step1. 次元数  $K$ 、収束判定用の歪閾値  $\epsilon$  を決める。反復回数  $m=0$  とセットする。  $K = \{1, 2, \dots, K\}$  とする。

Step2. 初期クラスタ中心  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_K$  を適当に決める。

Step3. サンプル  $\{X\}$  を次の方法で  $K$  個のクラスタに分類する。

任意の  $\ell \in K$  に対して、 $d(x_j, \mathbf{p}_i) \leq d(x_j, \mathbf{p}_\ell)$  ならば、 $x_j \in P_i$  と分類する。

ここで、 $D_m$  を次のように定義する。

$$D_m = K^{-1} \sum_{j=1}^K \min_{y_j \in P_j} d(y_j, \mathbf{p}_j) \quad (14)$$

Step4.  $(D_{m-1} - D_m)/D_m \leq \epsilon$  ならば、収束したとして反復を終了する。

Step5. クラスタの中心を更新する。  $m$  を  $m+1$  として、Step3へ戻る。

#### 3.2 BTC アルゴリズム(Block Truncation Coding)

画像を大きさ  $t = n \times n$  の小ブロックに分割し各小ブロックを独立に符号化する。  $X_1, X_2, \dots, X_t$  をブロック化したときのピクセル値とする。1次統計量を次のように定義する。

$$\begin{aligned}
 \bar{X} &= \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t X_i \\
 \overline{X^2} &= \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t X_i^2 \\
 \overline{\sigma^2} &= \overline{X^2} - \bar{X}^2
 \end{aligned} \quad (15)$$

ここで、しきい値  $X_{th}$  を決めて、次のように  $a$  と  $b$  によって量子化を行う。

If  $X_i \geq X_{th}$ , output =  $a$ .

If  $X_i < X_{th}$ , output =  $b$ .

ただし、 $a$ 、 $b$  は次のように定義する

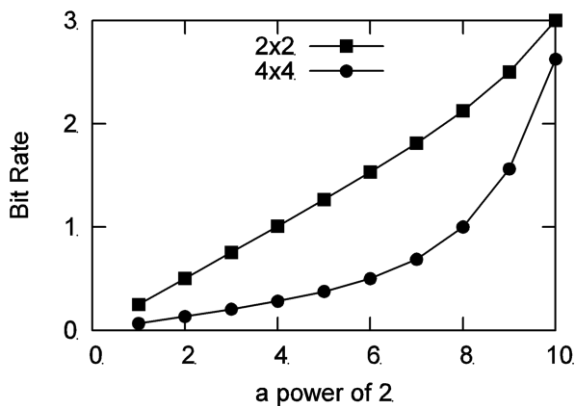


Fig. 2 Plots of the bite rate versus a power of 2.

$$a = \bar{X} - \bar{\sigma} \sqrt{\frac{q}{t-q}}$$

$$b = \bar{X} + \bar{\sigma} \sqrt{\frac{t-q}{q}}$$

ここで、 $q$  はブロック内で $X_{th}$ より大きいピクセル数である。この量子化により小ブロックは各画素にどちらかの濃淡値を割り当てるかを示すビットマップと、二つの濃淡値  $a$  と  $b$  に符号化される。画像を再構成するには、ビットマップに従って各画素に  $a$  か  $b$  のどちらかの濃淡値を割り当てればよい。

#### 4. 計算機シミュレーション

離散フレネル変換を画像符号化へ適用する。Section 2 で述べた 1 次元離散フレネル変換を 2 次元へ拡張する。

画像を  $2 \times 2$ 、 $4 \times 4$  の小ブロックに分割し、各ブロックに対して離散フレネル変換を行う。変換したブロックのフレネル変換係数をベクトル量子化と BTC アルゴリズムによって符号化を行い、符号化したデータをフレネル逆変換して画像を再構成した。ベクトル量子化は、量子化代表ベクトル  $K$  を 2 のべきによって値を変化させた。 $K = 2, 4, \dots, 1024$  に設定した。

ベクトル量子化のビットレート  $b.r.$  は次の式で定義する。

$$b.r. = \frac{\log_2 K}{s} + \frac{Ksb \text{ bits}}{M \text{ pixel}} \quad (16)$$

ここで、 $K$  は量子化代表ベクトルの数、 $s$  はベクトルの次元、 $b$  は代表ベクトルの bits 数 ( $b=8$ )、 $M$  は画像のピクセル数 ( $M=256 \times 256$ ) を表す。

Fig. 2 は、 $K$  の値を 2 のべきで変化させたときその指数部を横軸にとったビットレートを表示したものである。ブロックをそれぞれ  $2 \times 2$ 、 $4 \times 4$  にした時、共に  $K$  の値が大きくなるとビットレートは大きくなる。

MSE は次の式で定義する。

$$MSE = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N (x(m,n) - \tilde{x}(m,n))^2 \quad (17)$$

ただし、 $x(m,n)$  は元の画像で、 $\tilde{x}(m,n)$  は復元画像である。SNR は次の式で定義する。

$$SNR = 10 \log_{10} \left( \frac{255^2}{MSE} \right) \text{ dB} \quad (18)$$



Fig. 3 The original test image (256x256 pixel, 8bpp), referring to [9]. He is A. J. Fresnel (French physicist).



Fig. 4 VQ result at 2x2 Block.



Fig. 5 BTC result at 2x2 Block.

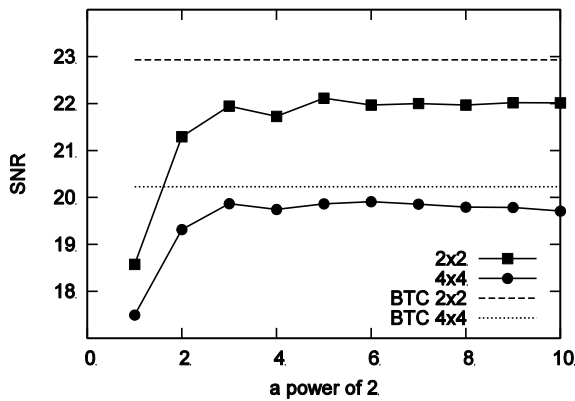


Fig. 6 Plots of the peak signal-to-noise(SNR) versus a power of 2.

Fig.3 は、計算機シミュレーションで使用したテスト画像である。画素数  $256 \times 256$  ピクセル。各画素は 256 の濃淡分布を持つ。Fig. 4 は、元画像を  $2 \times 2$  の小ブロックに分割したあと離散フレネル変換とベクトル量子化を行ったときの再構成画像である。初期代表ベクトルは乱数を使って生成した。K=1024 に設定したときのものである。Fig.5 は、元画像を  $2 \times 2$  の小ブロックに分割したあと離散フレネル変換と BTC アルゴリズムを行ったときの再構成画像である。しきい値  $X_{th} = \bar{X}$  と定義した。Fig. 6 はブロックを  $2 \times 2$ 、 $4 \times 4$  にして離散フレネル変換と量子化アルゴリズムを行い、元画像と再構成画像との SNR を表示したものである。ベクトル量子化は、パラメータとして代表ベクトル K の値を変化させた。各ブロックとも、ベクトル量子化よりも BTC アルゴリズムの方が優れていることがわかる。

## 5. まとめと今後の課題

空間的な帯域制限をすることで標本化定理が導出でき、離散フレネル変換が導出することができる。導出した離散フレネル変換を 2 次元に拡張して画像符号化への応用を計算機シミュレーションによって行った。離散フレネル変換に対してはパラメータを固定して行っているため、パラメータを変化させたときの画質への影響を調べる必要があり、最適なパラメータを求める方法を考える必要がある。フレネル変換係数は複素平面上の点なので DCT などと比較すると符号化するデータが多くなることになる。そのため複素係数を最適に符号化する方法が必要になる。離散的関数変換は計算時間がかかるため、ここで導出した離散フレネル変換の式(12)に Cooley-Turkey のアルゴリズムを適用すればかなりの時間短縮が可能となる。

## 参考文献

- [1]N. Aoyagi, "Theoretical Study of Optical Fresnel Transformations", Ph.D. dissertation, Tokyo Institute of Technology, Tokyo(1973).
- [2]N. M. Nasrabadi, R. A. King, "Image Coding Using Vector Quantization: A Review", IEEE Trans. Commun., Vol.36, No.8, pp.957-971(1988).
- [3]Y. Linde, A. Buzo, R. M. Gray, "An Algorithm for Vector Quantizer Design", IEEE Trans. Commun., Vol. COM-28, No.1, pp.84-95(1980).
- [4]W. Li, Y. Zhang, "Vector-Based Signal Processing and Quantization for Image and Video Compression", Proc. IEEE, Vol.83, No.2, pp317-335(1995).
- [5]H. J. Trussel, M. J. Vrhel, "Fundamentals of Digital Imaging", Cambridge University Press(2008).
- [6]W. Li, Y. Zhang, "Vector-Based Signal Processing and Quantization for Image and Video Compression", Proc. IEEE, Vol.83, No.2, pp.317-335(1995).
- [7]M. Goldberg, P. R. Boucher, S. Shline, "Image Compression Using Adaptive Vector Quantization", IEEE Trans. Commun., COM-32, No.2, pp180-187(1986).
- [8]E. Delp, O. R. Mitchell, "Image Compression Using Block Truncation Coding", IEEE Trans. Commun., COM-27, No.9, pp1335-1342(1979).
- [9]M. Mansuripur, "Classical Optics and its Applications", Cambridge University Press(2002).
- [10]橋本秀雄, "画像符号化アルゴリズム(II)-変換符号化-", テレビジョン学会誌 Vol. 43, No. 10, pp.1145-1155(1989).
- [11]斎藤隆弘, "画像符号化アルゴリズム(III)-ベクトル量子化-", テレビジョン学会誌 Vol. 43, No. 11, pp.1276-1284(1989).
- [12]美濃導彦, "画像処理論", 昭晃堂(2011).
- [13]飯國洋二, "信号処理", 培風館(2004).
- [14]長尾真, "画像認識論", コロナ社(1983).
- [15]大津展之, 栗田多喜夫, 関田巖, "パターン認識", 朝倉書店(1996).
- [16]飯島泰蔵, "パターン認識理論", 森北出版(1989).

## Appendix

$\sqrt{iN}$  の求め方。

$\sqrt{iN} = a + bi$  を満たす a, b を求める。

$$\begin{aligned} iN &= (a + bi)^2 \\ a^2 - b^2 + 2abi &= Ni \\ \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = N \end{cases} \end{aligned}$$

を a, b について解くと、

$$a = b = \sqrt{\frac{N}{2}}$$

同様に、 $\sqrt{i/N}$  を満たす a, b を求めると、

$$a = b = \sqrt{\frac{1}{2N}}$$

となる。