A-008

一般化 de Bruijn ダイグラフと一般化 Kautz ダイグラフの拡張について
An Extension of Generalized de Bruijn Digraphs and Generalized Kautz Digraphs

菊地 洋右† 松本 猛‡ 河村 奈々♯
Yosuke Kikuchi† Takeru Matsumoto‡ Nana Kawamura♯

1. はじめに

1946 年に数学者 de Bruijn は以下の問題を解決した。2 進 k 桁の数すべてを含む最短の数列の長さは2^kであり、そのような数列は$2^{2^{k-1}-k}$個ある[5]。例えば d=2, k=3 を考える。2 進 3 桁の数は 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 の 8 つである。これらすべてを含む最短の数列として 00010111 がある。この数列の最初の桁と最後の桁はつながっていると考える。よって 00010111 とこれを 1 ビットシフトした 00101110 は同じ数列とみなす。数列 00010111 を先頭から 1 桁ずつずらしながら 3 桁の数を挙げると 000, 001, 010, 101, 011, 111, 110, 100 となる。この 8 つの数を頂点集合とし、1 桁ずらして次の数になる関係を弧で表わす。例えば 001 からは 010 への弧と 011 への弧が存在する。 このようにして構成されたダイグラフを 2 進 3 桁の de Bruijn ダイグラフとよぶ。一般に d 進 k 桁の de Bruijn ダイグラフも同様に構成できる。de Bruijn ダイグラフは先述した数学の問題を解くのに用いられた。2 進 k 桁の de Bruijn ダイグラフのハミルトンサイクルが 2 進 k 桁の数すべてを含む最短の数列に対応しており、また 2 進 k 桁の de Bruijn ダイグラフと 2 進 k-1 桁の de Bruijn ダイグラフの関係に着目することで求めたい数列の個数が$2^{2^{k-1}-k}$となる。この de Bruijn ダイグラフについて最近ではデータ圧縮に用いる研究もなされている[3]。

de Bruijn ダイグラフは正則なダイグラフであり, 少ない次数と小さい直径に対して比較的頂点数が多いという性質をもっている。グラフの最大次数 Δ と直径 D を与えたときにグラフの頂点数の最大値を問う問題を(Δ, D)-問題という。この(Δ, D)-問題の上界は Moore bound とよばれている。そしてこの上界に一致する頂点数をもつグラフは Moore グラフとよばれている。ダイグラフにおける(Δ, D)-問題の Moore bound は

$$1+\Delta+\Delta^2+\cdots+\Delta^D=\frac{\Delta^{D+1}-1}{\Delta-1} \qquad (1)$$

となる。ただし、$\Delta>1$である[4, 8]。$\Delta>1$かつ$D>1$のときに Bridges らの研究によって Moore ダイグラフは存在しないことが知られている。d 進 k 桁の de Bruijn ダイグラフは頂点の最大次数が d であり、直径は k である。そしてこのときの頂点数はd^kである。これは式(1)の左辺の項の最大項である。このような観点から相互結合網のモデルとして de Bruijn ダイグラフの研究がなされた。ただ、d 進 k 桁の de Bruijn ダイグラフは頂点数がd^kと制限されている。そこで頂点数を一般の n とした一般化 de Bruijn ダイグラフが提案された[7]。またこの de Bruijn ダイグラフと似ている定義をもつ Kautz ダイグラフが提案された。Kautz ダイグラフ$K(d,k)$は d+1 進 k 桁の de Bruijn ダイグラフの部分グラフとなっている。この kautz ダイグラフ $K(d,k)$ の頂点の最大次数は d であり、直径は k である。このときの頂点数はd^k+d^{k-1} となっている。この頂点数は式(1)の左辺の最大項と 2 番目に大きい項の和であり、de Bruijn ダイグラフよりも Moore bound に近い値をもつダイグラフであり、総合結合網の観点からはより望ましいダイグラフといえる。そこで Kautz ダイグラフを一般化した一般化 Kautz ダイグラフが提案された。一般化 Kautz ダイグラフは Imase Itoh ダイグラフとも呼ばれている[2, 10]。一般化 de Bruijn ダイグラフと一般化 Kautz ダイグラフの定義を統合したダイグラフのクラスが consecutive-d ダイグラフである[6, 7]。また、consecutive-d ダイグラフを拡張したダイグラフとして c-circulant ダイグラフがある[12]。

グラフの支配数についての研究と同様にダイグラフの支配数についても様々な研究がなされている。Barkauskas らは任意のダイグラフが effcient dominating set をもつかどうかを判定する問題が NP 完全であることを示した。また、有向木に限定した場合は線形時間で effcient dominating set をみつけることができることを示した[1]。一般化 de Bruijn ダイグラフと一般化 Kautz ダイグラフに対しての支配数の研究は[11]でなされている。

本論文では一般化 de Bruijn ダイグラフと一般化 Kautz ダイグラフをそれぞれ拡張したダイグラフのクラスを導入し、そのクラスの同型性と支配数について考察する。支配数に対する結果は[11]の結果の拡張となっている。また、本論文で扱うグラフのクラスは consecutive-d ダイグラフのサブクラスである。

本論文の 2 章で必要となる定義と用語について述べる。3 章で扱うダイグラフと一般化 de Bruijn ダイグラフ、一般化 Kautz ダイグラフとの同型性ついて述べる。4 章で扱うダイグラフの支配数について述べ、5 章はまとめと今後の課題である。

2. 定義と用語

$V(G)$ 、$A(G)$をそれぞれダイグラフ G の頂点集合、弧集合とする。頂点 u から頂点 v への弧を(u,v)であらわす。このとき u は v の predecessor であり、v は u の successor である。

集合 $O(u)=\{v|(u,v)\in A(G)\}$を頂点 u の outset とよび、集合 $I(v)=\{u|(u,v)\in A(G)\}$を頂点 v の inset とよぶ。頂点に対して定義した outset、inset は頂点の部分集合 S に対しては$O(S)=\cup_{u\in S}O(u)$、$I(S)=\cup_{u\in S}I(u)$として定義する。$S\subset V(G)$に対して G の任意の頂点が S に含まれるまたは S のある頂点の successor であるとき、S は G の支配集合である。

また、$S\subset V(G)$に対して G の任意の頂点が S に含まれるまたは S のある頂点の predecessor であるとき、S は G の

†津山工業高等専門学校総合理工学科, NIT, Tsuyama College
‡津山工業高等専門学校専攻科, NIT, Tsuyama College
♯津山工業高等専門学校情報工学科, NIT, Tsuyama College

absorbant である。$S \subset V(G)$に含まれる任意の頂点 u、v に対して$(u,v) \notin V(G)$であるとき S は独立であるという。S が独立かつ支配集合であるとき S は G の solution とよばれ、S が独立かつ absorbant であるとき S は G の kernel とよばれる[9]。ダイグラフ G の支配集合で最小濃度であるものを dom(G)であらわし、dom(G)の濃度を$\gamma(G)$であらわす。$\gamma(G)$を G の支配数とよぶ。

2 つの整数 m、n について m が n を割り切る。つまり m が n の約数であるとき $m \mid n$ であらわす。また、m と n の最大公約数を gcd(m, n)であらわす。

de Bruijn ダイグラフ $dB(d,k)$の定義は以下のとおりである。

$$\begin{cases} V(dB(d,k)) = \mathbb{Z}_d^k \\ A(dB(d,k)) = \{(a_k a_{k-1} \cdots a_1, a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_1 x) \mid \\ \quad 0 \le x < d\} \end{cases} \tag{2}$$

式(2)において頂点$u = a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_0$を$u = a_{k-1} d^{k-1} + a_{k-2} d^{k-2} + \cdots + a_0 d^0$とあらわす。このとき u から隣接する頂点 v は$du + x \pmod{d^k}, 0 \le x < d$とかける。

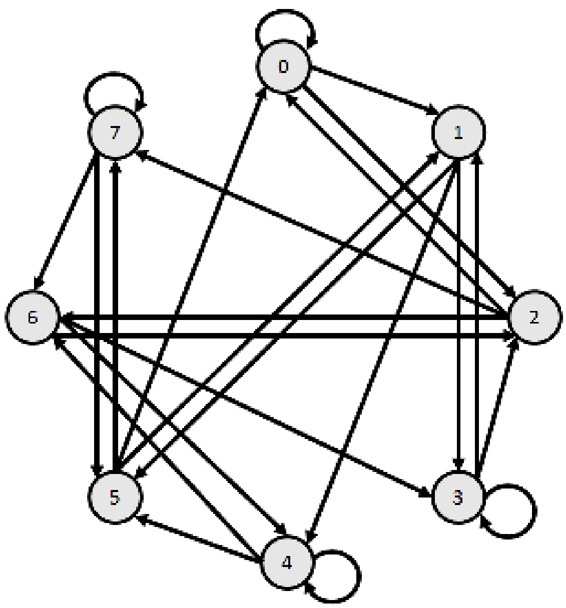

図 1　$Gb(8,3)$

これにより de Bruijn ダイグラフの隣接関係を数字のシフトによる定義から合同式を用いた定義に置き換えることができる。そこで、d^k を一般の n に置き換えることで一般化 de Bruijn ダイグラフ $Gb(n,d)$の次の定義が得られる。

$$\begin{cases} V(Gb(n,d)) = \{0,1,2,\cdots,n-1\} \\ A(Gb(n,d)) = \{(u,v) \mid v \equiv du + i \pmod{n}, 0 \le i < d\} \end{cases} \tag{3}$$

図 1 に一般化 de Bruijn ダイグラフの例として $Gb(8, 3)$を示す。

次に Kautz ダイグラフ$K(d,k)$の定義を式(4)として与える。

$$\begin{cases} V(K(d,k)) = \left\{ a_k a_{k-1} \cdots a_1 \,\middle|\, \begin{array}{l} a_i \in \mathbb{Z}_{d+1}, k \ge i \ge 1, \\ a_{j+1} \ne a_j, k-1 \ge j \ge 1 \end{array} \right\} \\ A(K(d,k)) = \{(a_k a_{k-1} \cdots a_1, a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_1 x) \mid \\ \quad 0 \le x \le d, x \ne a_1\} \end{cases} \tag{4}$$

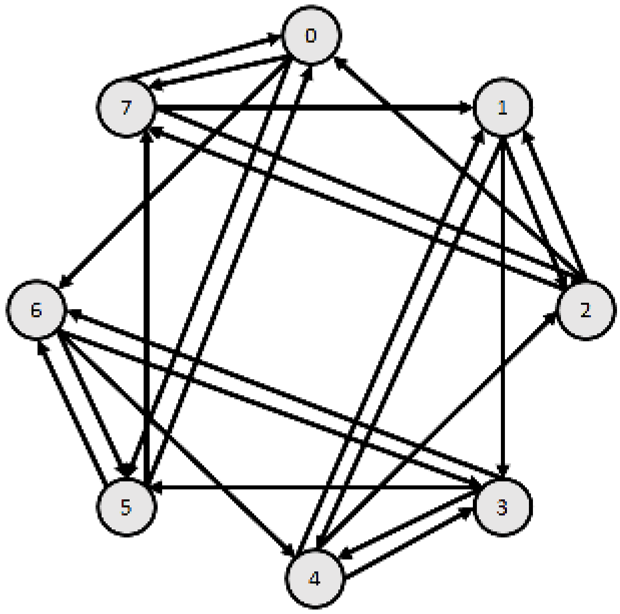

図 2　$Gk(8,3)$

この定義も数字のシフトによって定義されている。一般化 de bruijn ダイグラフのときと同様に合同式の定義に置き換え頂点数を一般の n とする。一般化 Kautz ダイグラフ $Gk(n,d)$の定義は以下のとおりである。図 2 は一般化 Kautz ダイグラフ $Gk(8, 3)$である。

$$\begin{cases} V(Gk(n,d)) = \{0,1,2,\cdots,n-1\} \\ A(Gk(n,d)) = \left\{ \begin{array}{c} (u,v) \mid v \equiv -du - i \pmod{n}, \\ 0 < i \le d \end{array} \right\} \end{cases} \tag{5}$$

式(3)の頂点の隣接関係をあらわす合同式を式(6)ように拡張する。式(5)の合同式についても式(7)のように同様に拡張する。

$$v \equiv du + k + i \pmod{n}, 0 \le i < d \tag{6}$$

$$v \equiv -du - k - i \pmod{n}, 0 < i \le d \tag{7}$$

ここで、k は固定した整数である。一般化 de Bruijn ダイグラフを拡張したダイグラフを $GB(n,d,k)$ とあらわし、一般 Kautz ダイグラフを拡張したダイグラフを $GK(n,d,k)$ とあらわすことにする。この $GB(n,d,k)$ と $GK(n,d,k)$の定義を明確に与えるとそれぞれ、

$$\begin{cases} V(GB(n,d,k)) = \{0,1,2,\cdots,n-1\} \\ A(GB(n,d,k)) = \left\{ \begin{array}{c} (u,v) \mid v \equiv du + k + i \pmod{n}, \\ 0 \le i < d \end{array} \right\} \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} V(GK(n,d,k)) = \{0,1,2,\cdots,n-1\} \\ A(GK(n,d,k)) = \left\{ \begin{array}{c} (u,v) \mid v \equiv -du - k - i \pmod{n}, \\ 0 < i \le d \end{array} \right\} \end{cases} \tag{9}$$

となる。この $GB(n,d,k)$において k=0 とすると一般化 de Bruijn ダイグラフ $Gb(n,d)$となり、$GK(n,d,k)$において k=0 とすると一般化 Kautz ダイグラフ $Gk(n,d)$となる。図 3 に例として $GB(8, 3, 1)$ を示す。図 1、3 より $Gb(8,3)= GB(8,3,0)$と $GB(8,3,1)$では自己ループの数が異なることから明らかに同型ではない。$GB(n,d,k)$が一般化 de Bruijn ダイグラフを真に

含む拡張されたクラスであることがわかる。同様に図 2 は $Gk(8,3)$であり、これは拡張された一般化 Kautz ダイグラフでは $GK(8,3,0)$である。図 4 は $GK(8,3,1)$である。この場合も自己ループの数が異なるので $Gk(8,3)= GK(8,3,0)$ と $GK(8,3,1)$が同型でないことがわかる。

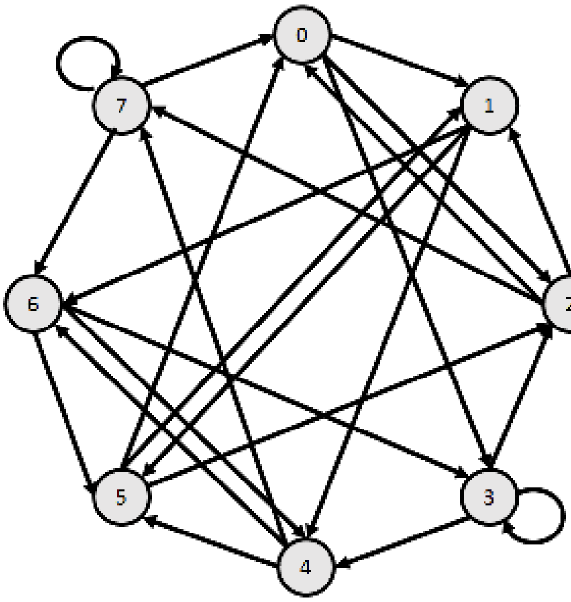

図 3　$GB(8,3,1)$

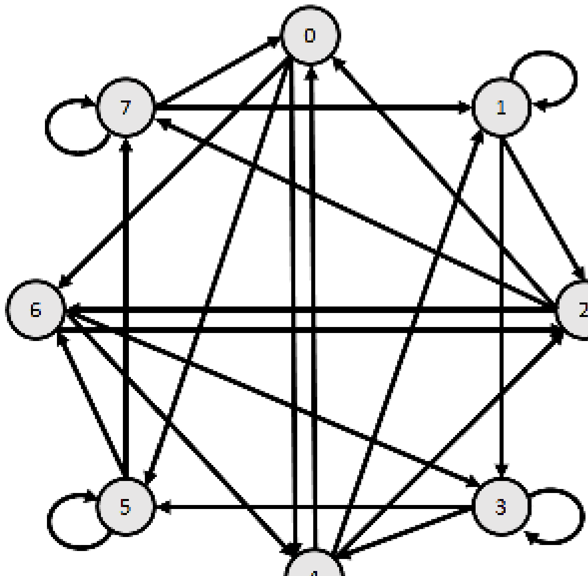

図 4　$GK(8,3,1)$

$GB(n,d,k)$と $GK(n,d,k)$を含むクラスは Du らによって提案されている。そのクラスは consecutive-d ダイグラフ $G(d, n, q, r)$であり、定義は以下のとおりである[6, 7]。

$$\begin{cases} V(G(d,n,q,r)) = \{0,1,2,\cdots,n-1\} \\ A(G(d,n,q,r)) = \left\{ \begin{matrix} (u,v) | v \equiv qu + r + i \pmod{n}, \\ 0 \le i < d \end{matrix} \right\} \end{cases} \quad (10)$$

式(10)より consecutive-d ダイグラフは $GB(n,d,k)$と $GK(n,d,k)$を含んだ概念であることがわかる。$GB(n,d,k)$は$G(d,n,d,k)$であり、$GK(n,d,k)$は$G(d,n,-d,-d-k)$である。

3. ダイグラフ *GB*(*n*,*d*,*k*) 、*GK*(*n*,*d*,*k*) の同型性

この章では $GB(n,d,k)$と $GK(n,d,k)$の同型性についてそれぞれ考察する。

3.1 ダイグラフ *GB*(*n*,*d*,*k*) の同型性

前章で導入したダイグラフ $GB(n,d,k)$ について k の値によって一般化 de Bruijn ダイグラフと同型になる場合がある。

補題 1 $\gcd(n, d-1)=1$ ならば任意の k, k' に対して $GB(n, d, k)$ と $GB(n, d, k')$ は同型である。

証明　$\gcd(n, d-1)=1$ のとき $GB(n, d, k)$が $Gb(n,d)$と同型であることを示せばよい。そのためには $GB(n, d, k)$においてある頂点 x が存在して

$$dx + k \equiv x \pmod{n}$$

を満たすことを示す。上式より

$$(d-1)x + k \equiv 0 \pmod{n} \quad (11)$$

今、$\gcd(n, d-1)=1$ より合同式の性質から式(11)を満たす$x = \alpha$がただ一つ存在する。よって $u \in V(Gb(n,d))$に対して写像$\phi(u) = u + \alpha$ は $Gb(n,d)$から $GB(n, d, k)$への同型写像となっている。■

補題 2 $\gcd(n, d-1)=g \neq 1$ かつ $g|k$ ならば, $GB(n, d, k)$ と $Gb(n, d)$ は同型である。

証明　$\gcd(n, d-1)=g$ かつ $g|k$ ならば $GB(n, d, k)$においてある頂点 x が存在して

$$(d-1)x + k \equiv 0 \pmod{n} \quad (12)$$

を満たす$x = \alpha$ が存在する。このとき、$u \in V(Gb(n,d))$に対して写像$\phi(u) = u + \alpha$ は $Gb(n,d)$から $GB(n, d, k)$への同型写像となっている。■

補題 3 $\gcd(n, d-1)=g \neq 1$ かつ $k \equiv k' \pmod{g}$ ならば, $GB(n, d, k)$ と $GB(n, d, k')$ は同型である。

証明　$GB(n, d, k)$ と $GB(n, d, k')$ について $0 \le k < g$ かつ $g \le k' < 2g$ とする。補題 2 より $GB(n, d, 0)$ と $GB(n, d, g)$は同型である。このときの $GB(n, d, 0)$から $GB(n, d, g)$への同型写像は $GB(n, d, k)$ から $GB(n, d, k')$ への同型写像となっている。同じ同型写像を用いて、j を整数とすると $(j-1)g \le k < jg$かつ $jg \le k' < (j+1)g$ に対しても同型であることが成り立つ。■

補題 2、3 について例を挙げる。補題 2 について $GB(12, 4, 3)$ は $GB(12, 4, 0)$ の頂点 u に対して $\phi(u) = u + 3 \pmod{12}$ とするとϕ は $GB(12, 4, 0)$から $GB(12, 4, 3)$ への同型写像になっている。$GB(12, 4, 0)$ において頂点 u から隣接する頂点は$O(u) = \{4u, 4u+1, 4u+2, 4u+3\}$となる。ただし、頂点の値は 12 を法とする。一方、$\phi(u)$から隣接する頂点は $O(\phi(u)) = \{4(u+3), 4(u+3)+1, 4(u+3)+2, 4(u+3)+3\}$となっている。補題 3 についても、この$\phi$を $GB(12, 4, 1)$ に用いると$\phi(GB(12,4,1)) \cong GB(12,4,4)$ であり、$\phi(GB(12,4,4)) \cong GB(12,4,7)$であることがわかる。一般に$\phi(GB(12,4,k)) \cong GB(12,4,k+3)$であることがわかる。

3.2 ダイグラフ $GK(n,d,k)$ の同型性

ダイグラフ $GK(n,d,k)$ が k の値によって一般化 kautz ダイグラフと同型になる場合について考える。

補題 4 gcd(n, d+1)=1 ならば任意の k, k' に対して $GK(n, d, k)$ と $GK(n, d, k')$ は同型である。

証明　gcd(n, d+1)=1 のとき $GK(n, d, k)$ が $Gk(n,d)$と同型であることを示せばよい。そのためには $GK(n, d, k)$においてある頂点 x が存在して

$$(d+1)x+k \equiv 0 \pmod n \tag{13}$$

を満たすことを示す。補題 4 と同様に、gcd(n, d+1)=1 より式(13)を満たす$x=\alpha$ がただ一つ存在する。このとき、写像$\phi(u)=u+\alpha$ は $Gk(n,d)$から $GK(n, d, k)$への同型写像となっている。 ■

補題 5 gcd(n, d+1)=g≠1 かつ g|k ならば, $GK(n, d, k)$ と $Gk(n, d)$ は同型である。

証明　補題 2 と同様に示せる。gcd(n, d+1)=g かつ g|k ならば $GK(n, d, k)$においてある頂点 x が存在して

$$(d+1)x+k \equiv 0 \pmod n \tag{14}$$

を満たす$x=\alpha$ が存在する。このとき、$u \in V(Gk(n,d))$に対して写像$\phi(u)=u+\alpha$ は $Gk(n,d)$から $GK(n, d, k)$への同型写像となっている。 ■

補題 6 gcd(n, d+1)=g≠1 かつ $k \equiv k' \pmod g$ ならば, $GK(n, d, k)$ と $GK(n, d, k')$ は同型である。

証明は補題 3 と同様である。 ■

補題 5、6 についても例を挙げる。補題 5 について GK(12, 3, 4) は GK(12, 3, 0) の頂点 u に対して$\phi(u)=u+5$ (mod 12) とするとϕ は GK(12, 3, 0)から GK(12, 3, 4) への同型写像になっている。補題 6 について、$\phi(u)=u+5$ (mod 12)を GK(12, 3, 1) に用いると GK(12, 3, 5)への同型写像になっていることがわかる。さらにϕ を GK(12, 3, 5) に用いると GK(12, 3, 9)への同型写像になっていることがわかる。さらに、ϕ を GK(12, 3, 2) に用いると GK(12, 3, 6)への同型写像になっていることがわかる。さらにϕ を GK(12, 3, 6) に用いると GK(12, 3, 10)への同型写像になっていることがわかる。

4. $GB(n,d,k)$ と $GK(n,d,k)$の支配数

それぞれのダイグラフの支配数について述べる前に、両方に共通して成り立つ性質がある。ダイグラフ G を d-正則なダイグラフとする。このとき最小支配集合 dom(G)が solution をもつため条件として d+1|n が挙げられる。さらに支配数に関して

$$\gamma(G)+d\gamma(G) \geq n$$

である。よって、次が成り立つ。

補題 7 $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{d+1} \right\rceil$ ■

また、$\gamma(G)-1+d(\gamma(G)-1)<n$

である。よって、

補題 8 $\gamma(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{d+1} \right\rfloor + 1$ ■

を得る。

補題 7, 8 より

定理 1 $d+1|n$ でないならば

$$\gamma(G)=\left\lceil \frac{n}{d+1} \right\rceil$$

であり、G は solution をもたない。 ■

4.1 $GB(n,d,k)$ の支配数

$d+1|n$ のとき$\gamma(GB(n,d,k))$ は$\frac{n}{d+1}$ または$\frac{n}{d+1}+1$ のいずれかとなる。以下、$d+1|n$ について考える。

定理 2 $d+1|n$ かつ(d+1)k=n ならば

$$\gamma(GB(n,d,k))=\frac{n}{d+1}$$

であり、$GB(n,d,k)$ は solution をもつ。

証明　頂点の部分集合$S=\{0,1,2,\cdots,k-1\}$ を考える。このとき$O(S)=\{k,k+1,\cdots,k+d-1,k+d,k+d+1,\cdots,k+2d-1,k+2d,k+2d+1,\cdots,k+3d-1,\cdots,k+d(k-1),k+d(k-1)+1,\cdots,k+d(k-1)+d-1\}$ である。ただし、$O(S)$ の各頂点はnを法とする。よって S は独立な支配集合となっている。 ■

定理 2 と補題 3 より次が成り立つ。

系 1 (d+1)k=n 、gcd(n, d-1)=g≠1 とする。このとき $k \equiv k'$ (mod g) なる k'について

$$\gamma(GB(n,d,k'))=\frac{n}{d+1}$$

であり、$GB(n,d,k')$ は solution をもつ。 ■

$GB(12,3,3)$ は定理 2 より頂点集合 S={0,1,2}を考えると $O(S)=\{3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ となっており、{0,1,2}が solution となっている。$GB(12,3,1)$についても系 1 より solution が存在する。実際、頂点集合 S={1,2, 3}に対して $O(S)=\{4,5,6,7,8,9,10,11,0\}$ となっており、S は solution である。

4.2 $GK(n,d,k)$ の支配数

$GK(n,d,k)$ について考える。$GB(n,d,k)$ と同様に定理 1 より $d+1|n$ のとき$\gamma(GK(n,d,k))$ は$\frac{n}{d+1}$ または$\frac{n}{d+1}+1$ のいずれかとなる。$\gamma(GK(n,d,0))$ については次のことが[11]で示されている。

定理 3[11] $\gamma(GK(n,d,0))=\left\lceil \frac{n}{d+1} \right\rceil$

以下、$d+1|n$ について考える。定理 3 から次が得られる。

系 2 $d+1|n$ ならば$\gamma(GK(n,d,0))=\frac{n}{d+1}$であり、$GK(n,d,0)$ は solution をもつ。

証明 $GK(n,d,0)$の頂点集合 $S=\left\{0,1,2,\cdots,\frac{n}{d+1}-1\right\}$ を考える。このとき S の outset は$O(S)=\{n-1,n-2,\cdots,n-d,n-$

$d-1, n-d-2, \cdots, n-2d, \cdots, n-d\left(\frac{n}{d+1}-1\right)-1,\ n-d\left(\frac{n}{d+1}-1\right)-2, \cdots, n-d\left(\frac{n}{d+1}-1\right)-d\}$ となる。よって S は独立な支配集合となっており、solution である。

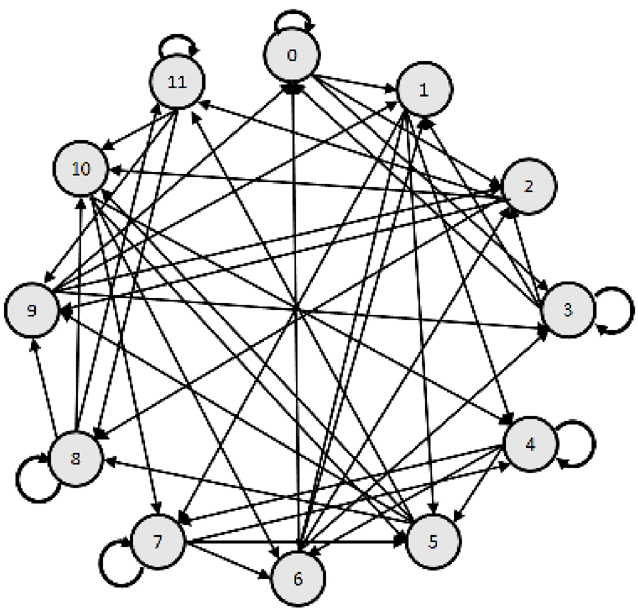

図 5　*Gb*(12,4)=*GB* (12,4,0)

補題 5 と系 2 より、次の定理が成り立つ。

定理 4 $d+1|n$ かつ d+1|k ならば, $\gamma(GK(n,d,k)) = \frac{n}{d+1}$ であり、$GK(n,d,k)$ は solution をもつ。 ■

5. まとめと今後の課題

本論文では一般化 de Bruijn ダイグラフと一般化 Kautz ダイグラフをそれぞれ拡張した$GB(n,d,k)$ と$GK(n,d,k)$を導入し、そのいくつかの性質について考察した。$GB(n,d,k)$が$Gb(n,d)$ と同型となる条件、$GK(n,d,k)$が$Gk(n,d)$ と同型となる条件について述べた。また、$GB(n,d,k)$ と $GK(n,d,k)$の支配数についても考察した。$d+1|n$ の場合についてそれぞれのダイグラフに対して solution をもつ条件を示した。

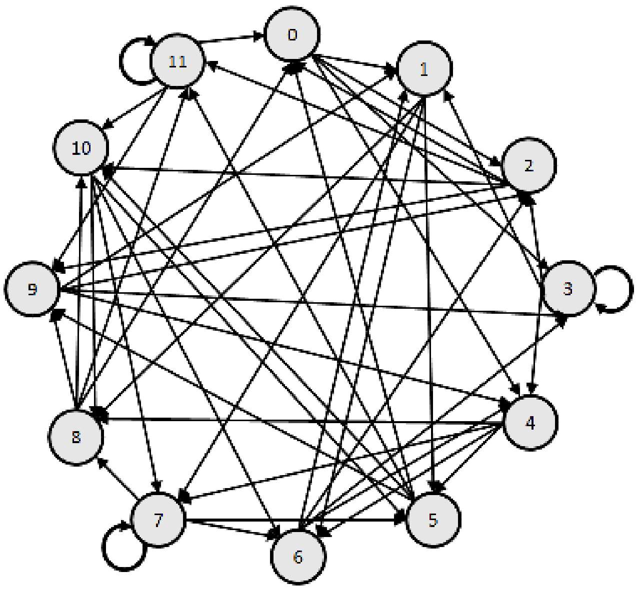

図 6　*Gb*(12,4,1)

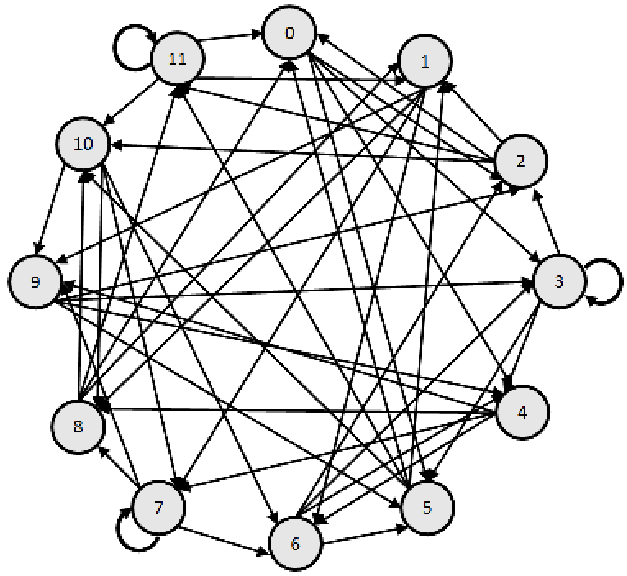

図 7　*Gb*(12,4,1)

今後の課題として以下が挙げられる。まず、$GB(n,d,k)$、$GK(n,d,k)$の同型性ついては完全にはわかっていない。これについては例えば$Gb(n,d)$ と同型でない$GB(n,d,k)$と$GB(n,d,k')$ が同型となるための条件は何かという問題が考えられる。具体的な例を挙げるとGB(12,4,1)とGB(12,4,2) はそれぞれGb(12,4) と非同型である(図 5、6、7 参照)。また、補題 3 からは GB(12,4,1) とGB(12,4,2) が同型であるかはわからない。しかし、実際にはこれら二つのダイグラフは同型である。実際にGB(12,4,1) からGB(12,4,2) への写像 ϕ を $\phi(0)=9$、$\phi(1)=5$、$\phi(2)=4$、$\phi(3)=3$、$\phi(4)=2$、$\phi(5)=1$、$\phi(6)=0$、$\phi(7)=11$、$\phi(8)=10$、$\phi(9)=6$、$\phi(10)=8$、$\phi(11)=7$とするとϕ は同型写像となっている。

支配数について$GB(n,d,k)$の同型性についてわかれば、支配数をすべての n、d、k に対して求めることができる。また、グラフと異なりダイグラフでは支配集合のほかに absorbant や kernel といった概念がある。一般化 de Bruijn ダイグラフの absorbant については Shan ら[13]の研究がある。一般化 de Bruijn ダイグラフで行われた様々な研究を $GB(n,d,k)$ および $GK(n,d,k)$ において行うことでより拡張した結果が得られるのではないかと考えている。

$GB(n,d,k)$ および $GK(n,d,k)$ を拡張した概念として Du らの提案した consecutive-*d* ダイグラフがあることを述べた。さらに consecutive-*d* ダイグラフに対しても$GB(n,d,k)$ および $GK(n,d,k)$での結果が応用できるのではないかと思われる。

参考文献

[1] A. E. Barkauskas, L. H. Host, “Finding efficient dominating sets in oriented graphs”, Congr. Numer. Vol.98 (1993).

[2] J.-C. Bermond, C. Peyrat, “De Bruijn and Kautz networks: a competitor for the hypercube?”, Hypercube and Distributed Computers (1989).
[3] Christina Boucher, Alexander Bowe, Travis Gagie, Simon J. Puglisi, Kunihiko Sadakane, “Variable-Order de Bruijn Graphs”, Proc. IEEE Data Compression Conference (2015).
[4] W. G. Bridges, Sam Toueg, “On the inpossibility of directed Moore graphs”, Journal Combinatorial Theorey, Ser. B, Vol.29 (1980).
[5] N. G. de Bruijn, “A combinatorial problem”, Prc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch, Ser. A, Vol.49 (1946).
[6] Ding-Zhu Du, D.Frank Hsu, G.W.Peck, “Connectivity of consecutive-*d* digraph”, Discrete Applied Mathemaatics, Vol.37/38(1992).
[7] Ding-Zhu Du, Feng Gao, D.Frank Hsu, “de Bruiin digraphs, Kautz digraphs, and their generalizations”, Combinatorial Network Theory (1996).
[8] M. A. Fiol, I. Alegre, J. L. A. Yebra, “Line digraph iterations and the (d, k) problem for directed graphs”.
[9] J. Ghoshal, R. Laskar, D. Pillone, “Topics on domination in directed graphs”, Domination in Graphs (1998).
[10] M. Imase, M. Itoh, “A design for directed graphs with minimum diameter”, IEEE Trans. Computer, Vol.C-32 (1983).
[11] Y. Kikuchi, Y. Shibata, “On the domination numbers of generalized de Bruijn digraphs and generalized Kautz digraphs”, Information Processing Letters, Vol.86 (2003).
[12] M. Mora, O. Serra, M. A. Fiol, “General properties of c-circulant digraphs”, ARS Combinatoria, Vol.25C (1988).
[13] E. Shan, T. C. E. Cheng, L. Kang, “Absorbant of generalized de bruijn digraphs”, Information Processing Letters, Vol.105 (2007).