A-007

最遠点ボロノイ図の作図手法に関する研究
Research related to construction method of the farthest point Voronoi diagram

堤建介 † 鹿嶋雅之 ‡ 福元伸也 § 佐藤公則 ¶ 渡邊睦 ‖
Kensuke Tsutsumi Masayuki Kashima Shinya Fukumoto Kiminori Sato Mutsumi Watanabe

1. はじめに

ボロノイ図は，ある空間上に任意に配置された複数個の母点に対し，その空間上で定義された距離に基づいて，各々の母点から近い領域で塗り分けられた領域分割図であり，キタキツネの縄張りや亀の甲羅の模様など，自然界ではしばしば観測される一般的な図である．ボロノイ図は，様々な分野で利用されており，様々な距離空間でのボロノイ図が定義されており，それらの作図手法も多数提案されている．ボロノイ図は連続空間におけるものと，離散空間におけるものに大別される．本研究では，離散空間上で定義された離散ボロノイ図を対象とする．ボロノイ図は，ユークリッド距離に基づいたものが一般的であるが，マンハッタン距離や最大値距離に基づいた，非ユークリッド距離で定義されたボロノイ図や，母点の勢力範囲に重みを付けた重み付きボロノイ図，空間上の障害物への迂回路を考慮した結晶成長ボロノイ図など，様々なものが定義されている．また，これらのボロノイ図を拡張した定義として，複数個の母点からの距離を考慮した高位ボロノイ図も定義されている．一般に，ボロノイ図は母点からの距離が近い点をその母点の領域とするが，それとは反対に，母点から最も遠い点をその母点の領域とする領域分割図も考えることができる．このような領域分割図は最遠点ボロノイ図と呼ばれる．最遠点ボロノイ図は，全ての母点の重みが等しい場合，母点群を囲む凸包の頂点となる母点のみが領域を持ち，凸包の内部の母点については，領域は存在しない．全ての母点の重みが等しい場合の最遠点ボロノイ図については，逐次添加法による作図手法が提案されている．しかし，乗法重み付きボロノイなど，各々の母点の拡大速度が異なるボロノイ図に対しては，未だ有効な作図手法は提案されていない．離散ボロノイ図の作図手法として，渡辺らによって波面法が提案されている．波面法は予め作成された距離表に基づき，母点の領域を同心円状に拡大して求める手法であり，母点の数に依存せず，高速にボロノイ図を作図することができる．本稿では，ユークリッド距離の逆数を距離とした距離表を作成することにより，ユークリッド空間における最遠点ボロノイ図を作成する．さらに，複数の重みに基づく距離表を用いることにより，乗法重み付きボロノイ図および乗法重み付き最遠点ボロノイ図を作図する手法について提案する．また，全探索法と提案手法の作図結果の比較を行い，新しい作図手法の有用性を検証する．

† (社) 電子情報通信学会， IEICE
‡ (社) 情報処理学会，IPSJ

2. ボロノイ図の概要

ボロノイ図とは空間上の点がどの母点に属するかを表した領域分割図である．ユークリッド距離に基づいて領域分割するものが一般的であるが，マンハッタン距離，最大値距離など様々な距離定義に基づくボロノイ図も存在する．．ユークリッド距離に基づいた一般的なボロノイ図の場合，ボロノイ領域の境界は母点同士の垂直二等分線で分けた図になる． 図 1 にユークリッド距離に基づいたボロノイ図の一例を示す． $d(p, p_i)$ を母点 p_i と空間上の任意の点 p との距離とすると，母点 p_i のボロノイ領域 $V(p_i)$ は，次の式で定義される．

$$V(p_i) = \{p \in R^k | d(p, p_i) < d(p, p_j)\}, i \neq j \qquad (1)$$

例えば，図 1 で母点をコンビニとすると，真ん中のコンビニが一番近い領域は黄緑色で塗られた領域に属する． このように商業施設の配置などにも用いられる．

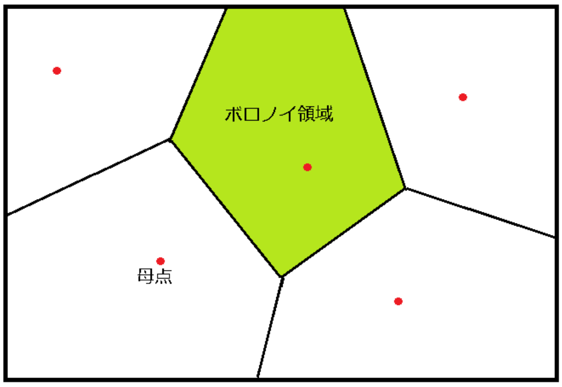

図 1: ボロノイ図

次に本研究に関するボロノイ図の種類と作図手法について述べる．

高位ボロノイ図は，最も近い複数の母点によって領域を分割した図である． 母点が n 個あったとき 1 から n 位の高位ボロノイ図まで作図することができる．例えば，3 位の高位ボロノイ図は，1，2，3 番目に近い母点を求め，それらの組み合わせが同じものを領域としたものである．また，組み合わせでなく順序別に領域を分けたものも高位ボロノイ図の概念に含まれる．母点の集合 S としたとき，順序なし高位ボロノイ図は以下のような式で定義される. ただし，この式は 3 位のボロノイ図における式である．

$$\begin{aligned} V(i, j, k) = \{p \in R^k | d(p, p_i) \leq d(p, p_s); \\ d(p, p_j) \leq d(p, p_s); d(p, p_k) \leq d(p, p_s); \\ s \in S; s \neq i, j, k\} \end{aligned} \qquad (2)$$

この式では，3 位の高位ボロノイ領域 V_i, j, k は i 番目，j 番目，k 番目の三つの母点を最近傍とする点の集合であることを示している．k 位ボロノイ図についても同様に定義できる．

乗法重み付きボロノイ図は，母点に影響力の差があるボロノイ図である．例えば，消防署を母点としたときに規模の大きさによってそれぞれ受け持つ領域には差がある．そのような場合に母点に重みをつけることでどの消防署が対応するかの区域分けすることができる．

重みを v_i としたときに，母点 P_i と任意の点 p の距離は次の式のようになる．

$$\frac{1}{v_i}d(P, P_i) \tag{3}$$

この式を一般的なボロノイ図に当てはめることで乗法重み付きボロノイ図を作図することができる．

図 2 は，母点にそれぞれ重みを付けたものである．上の母点は 5，左の母点は 3，右は 1 というように重みを付けている．見ればわかるように重みが大きいほど，その母点が持つ領域が大きいことがわかる．

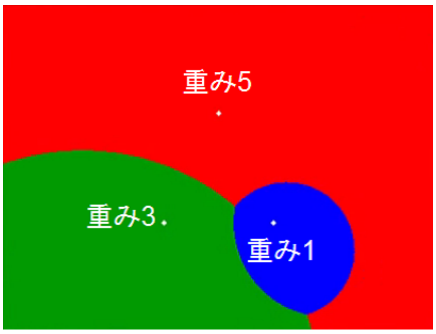

図 2: 乗法重み付きボロノイ図

ボロノイ図は「平面上のすべての点がどの母点に近いのかを示した領域図」である．それに対して，本研究で扱う最遠点ボロノイ図は「平面上のすべての点が他の母点より遠い領域を示した領域図」となる．

図 3 は母点 3 つにおけるボロノイ図であり，母点 1 における領域は母点 2 と 3 より母点 1 に近い赤の領域である．図 4 は母点 3 つにおける最遠点ボロノイ図であり，母点 1 における領域は母点 2 と母点 3 より母点 1 が遠い赤の領域である．母点 2，3 も同様に分かれている．

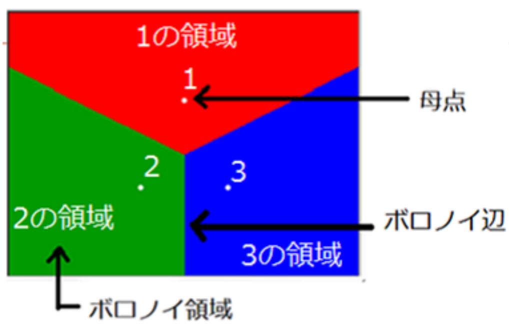

図 3: ボロノイ図

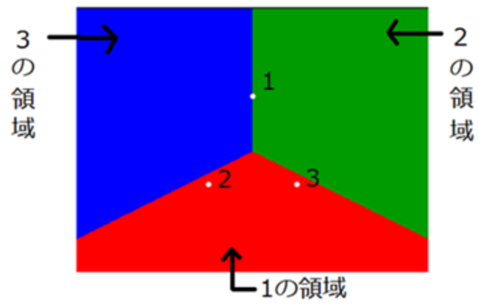

図 4: 最遠点ボロノイ図

ボロノイ図の作図手法について説明する．代表的な作図手法を挙げる．

・全探索法

母点とすべての点との距離を比較してどの母点に属するかで領域分けを行う方法．

・波面法

距離表を用いて母点から波面のように領域を広げて描く方法．

・逐次添加法

3 つの母点からなるボロノイ図に逐次，母点を追加して描く方法．

3. 最遠点ボロノイ図の作図手法

提案手法の前に波面法について述べる．波面法とは距離表を用いて母点から同心円状に領域を拡大させて作図する方法である．領域同士ぶつかるところが境界となる．

ここでいう距離表とは x 座標の 2 乗と y 座標の 2 乗を足した距離 Dist の値が小さい順に並べた表のことである．条件は $x \geq y$ である．

X	0	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	3	4	4	5·····
Y	0	0	1	0	1	2	0	1	2	0	1	3	2	3	0·····
Dist	0	1	2	4	5	8	9	10	13	16	17	18	20	25	25····

図 5: 距離表

また，最遠点ボロノイ図と高位ボロノイ図の関係について述べる．母点 n 個のとき，最遠点ボロノイ図と n-1 位の高位ボロノイ図は境界線が同じという特徴がある．これは図 6 である母点 3 つの最遠点ボロノイ図の母点 2 と母点 3 より母点 1 が遠い赤の領域は，図 7 である母点 3 における 2 位ボロノイ図 (n-1 位ボロノイ図) の母点 2 と母点 3 に同時に近い領域と等しいということである．他の領域に関しても同様である．

上記より n-1 位ボロノイ図を作図することで最遠点ボロノイ図を作図することが可能である．また，波面法を使うことで乗法重み付きにも対応した作図も可能だと考える．

ボロノイ図を作図する際，波面法の距離表を用いて母点から同心円状に領域を拡大し，ぶつかったところが境界線としたが，n-1 位ボロノイ図の場合，ぶつかったあともそのまま拡大を続けることで作図する継続波面法を提案する．

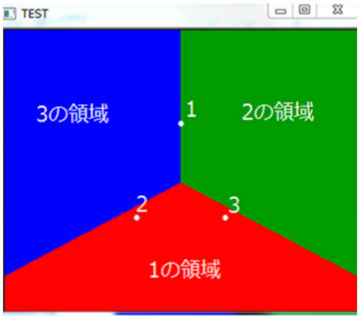

図 6: 最遠点ボロノイ図

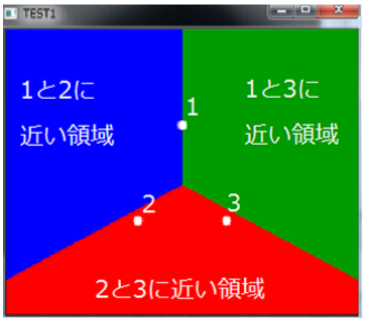

図 7: 母点 3 つにおける 2 位ボロノイ図

4. 実験結果

前章で提案した方法を比較する方法として，全探索法を用いる．全探索法については第 2 章で述べたが，母点とすべての点との距離を比較してどの母点に属するかで領域分けを行う手法である．この手法は最遠点ボロノイ図も作図することが可能であり，真値として用いることができる．

全探索法と提案手法を比較することで提案手法の有用性を計る．方法としてはボロノイ図を表示する際の画面の画素ごとに属する母点番号を付ける．全探索法と提案手法で同じ位置の画素の番号を比較する．全画素数の中で一致した画素数を計算し，次式のように一致率によって評価を行う．

$$\text{一致率 }(\%)\frac{\text{番号の一致した画素数}}{\text{全画素数}} \times 100 \qquad (4)$$

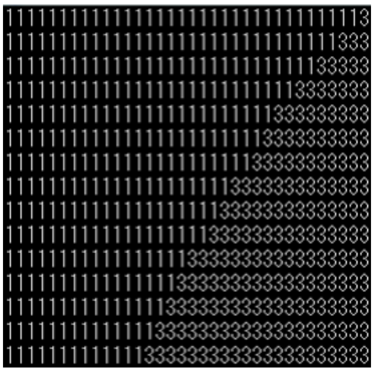

図 8: 全探索法の一部

継続波面法は距離表を使った波面法で領域を拡大させて，ぶつかったあとも続けて拡大させていく方法で作図を行う．

重みなしで全探索法と比較を行った結果，一致率は 99.8%と高い結果が得られた．しかし，重み (上：1，左下：2，右下：2) で全探索法と比較を行った結果，一致率は 72.9%となり，誤差が大きいことがわかる．

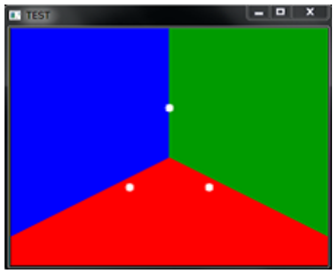

図 9: 全探索法（重みなし）

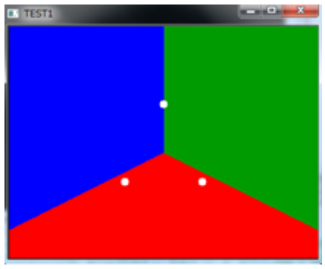

図 10: 継続波面法（重みなし）

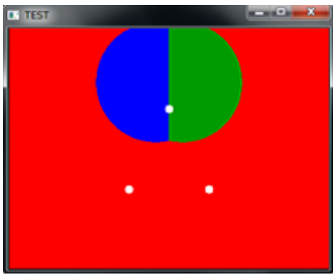

図 11: 全探索法（重みあり）

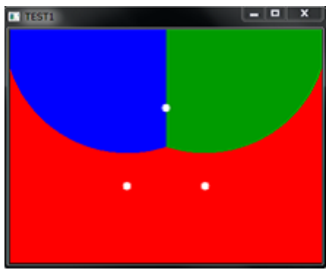

図 12: 継続波面法 (重みあり)

5. 改善

継続波面法の結果を全探索法に近づけるためには距離表を改善する必要があると考えられる．改善前の距離表は図 13 のようになっており，赤のラインごとに一つずつ読み込んで領域を拡大させていた．

X	0	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	3	4	4	5‥‥
Y	0	0	1	0	1	2	0	1	2	0	1	3	2	3	0‥‥
Dist	0	1	2	4	5	8	9	10	13	16	17	18	20	25	25‥‥

図 13: 改善前の距離表

しかし，この距離表では重みを付けた際に隣接する要素間の距離の差は要素の位置により異なる．そこで，図 14 のように各々の母点の重みを考慮した距離表を用意し，そこからさらに図 15 のように新しい距離表を作成する．ここで作成される距離表には，従来の距離表の要素である離散店の座標と距離に加え，距離の重みを要素として持つ．距離表を読み込み，母点の領域を塗りつぶす際に，この距離の重みと同じ重みを持つ母点だけ，領域を塗りつぶしていく．これにより，乗法重み付きボロノイ図を作図することができる．また、継続波面法ではなく，距離表を降順に読み込み，領域を塗りつぶすことにより，乗法重み付き最遠点ボロノイ図を作図することができる．

重み1の距離表

x	0	1	1	2	2
y	0	0	1	0	1
weight	1	1	1	1	1
dist	0	1	1.41	2	2.24

重み2の距離表

x	0	1	1	2	2
y	0	0	1	0	1
weight	2	2	2	2	2
dist	0	2	2.83	4	4.47

重み3の距離表

x	0	1	1	2	2
y	0	0	1	0	1
weight	3	3	3	3	3
dist	0	3	4.24	6	6.71

図 14: 重みを要素とした距離表

乗法重み付きボロノイ図

x	0	0	0	1	1	1	2	2	1	2	3	1	3	3	2	4	4	3
y	0	0	0	0	1	0	0	1	1	2	0	0	1	2	0	0	1	3
weight	1	2	3	1	1	2	1	1	2	1	1	3	1	1	2	1	1	1
dist	0	0	0	1	1.41	2	2	2.24	2.83	2.83	3	3	3.16	3.61	4	4	4.12	4.24

乗法重み付き最遠点ボロノイ図

図 15: 新しい距離表

改善した距離表を用いて最遠点ボロノイ図の作図を行った．重みを付けずに全探索法と比較を行った結果，一致率は 99.9%と高い結果が得られた．また，重み (上：2，左下：1，右下：1) で全探索と比較を行った結果，一致率は 99.9%とどちらも 99.9%以上という結果が得られた．

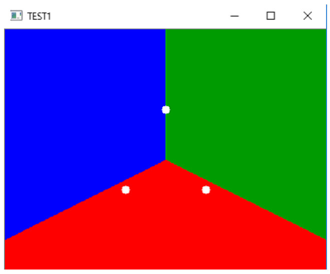

図 16: 改善した降順波面法（重みなし）

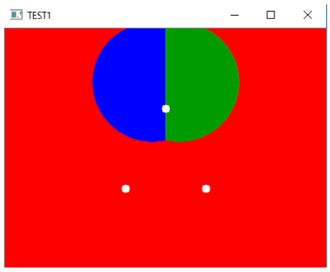

図 17: 改善した降順波面法（重みあり）

6. 本研究の結論

本研究では，最遠点ボロノイ図の新しい作図手法を二つ提案し，実験を行い，既存の全探索法に 99.9%以上一致させた．また，乗法重み付きにも対応を可能とした．

今後の課題として，境界線の歪みが挙げられる．図 17 だと分かりにくいが，図 18 境界線だけ色を塗ると歪みがあることがわかる．これは母点ごとに距離表を読み込む優先度によるものである．また，様々なパターンによる一致率の検証，全探索法と新しい作図手法の作図時間比較が今後の課題である．

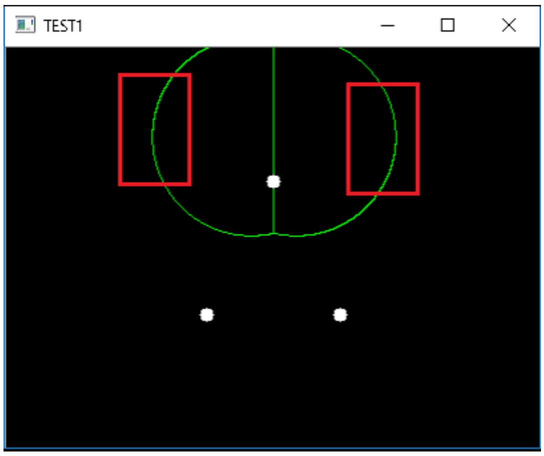

図 18: 境界線の歪み

謝辞

本研究を行うにあたって，ご指導，協力をしてくださった渡邊研究グループの皆様に感謝します．渡邊睦教授，佐藤公則教授，福元伸也助教は専門ではない分野にもかかわらず，率直な意見や研究のアプローチの仕方な

ど，研究の基礎となる考え方を教えていただき感謝しています．鹿嶋雅之助教はボロノイ図についてのわかりやすいご指導や参考書など貸していただくなど，一から教えていただき感謝しています. また，先輩方や同期のメンバーには，わからないところを気軽に教えていただきました.

本研究は様々な協力があって成すことができたことを心より感謝します.

参考文献

[1] 杉原厚吉，“ なわばりの数理モデル-ボロノイ図からの数理工学入門- ”，本 共立出版 2009.

[2] 春本仁志，鹿嶋雅之，佐藤公則，渡邊睦，“非回折ボロノイ図に基づいた監視カメラの配置問題”，電子情報通信学会技術研究報告．CQ，コミュニケーションクオリティ 109(373)，339-344，2010-01-14.

[3] 小林景，杉原厚吉，“ 乗法重みつき結晶成長ボロノイ図の近似構成法とその応用 ”，電子情報通信学会論文誌．A，基礎・境界 J83-A(12)，1495-1504，2000-12-25.

[4] 渕田孝康，村島定行，渡邊貴史，森邦彦，栗園貢，“2 次元離散画面上の高次のボロノイ図作成について ”，電子情報通信学会論文誌 A Vol.J82-A No.2 pp.283-288，1999-02-25.

[5] 村島定行，渡邊貴史，渕田孝康，森邦彦，栗園貢，“非ユークリッド距離に基づく 2 次元離散ボロノイ図の作成”，電子情報通信学会論文誌 D Vol.J81-D1 No.5 pp.691-699，1998-06-25.

[6] 鈴木敦夫，“ 最遠ボロノイ図の逐次添加型算法 ”，情報処理学会研究報告アルゴリズム（AL）1989(51(1989-AL-008))，1-6，1989-06-23.