A-005

多次元立方体グラフの部分グラフの内点サイズの最大値を導く再帰方程式の解法

A Solution of the Recursive Equation That Represents the Maximum of the Number of Inner Vertices of a Subgraph of a Hypercube

神保 秀司†
Shuji JIMBO

1 はじめに

正整数 k に対して，k 次元立方体グラフ Q_k を k 次元ユークリッド空間上の各座標の値が 0 または 1 である 2^k 個の点からなる集合 $V(Q_k)=\{0,1\}^k$ を点集合とし，2 点 v と w の距離が丁度 1 であることが v と w を結ぶ辺が存在するための必要十分条件であるものとして定義する．k 次元立方体グラフを総称して多次元立方体グラフと呼ぶ．$V(Q_k)$ の部分集合 S による誘導部分グラフの点 v が Q_k において S 以外の点と隣接していないとき v は S の内点と呼ぶ．さらに，S の内点すべてからなる集合を S の内点集合と呼び，$\mathcal{I}(S)$ で表す．与えられた k, n に対して Q_k の n 個の 点からなる集合 ($V(Q_k)$ の n 集合) S でその内点数 $|\mathcal{I}(S)|$ が $V(Q_k)$ の n 集合の内点数の最大値であるものを Q_k の n 点内点集合最大化集合と呼び，その内点数を $e_k(n)$ で表す．

著者らにより $e_k(n)$ を表す二項係数の総和を使った数式が得られている [1]．その証明の概略は，次のとおりである．先ず，$e_k(n)$ が満たす必要がある再帰不等式 $R(e_k(n))$ を導き，$R(e_k(n))$ の中の不等号を等号に置き換え，さらに，関数名を e から f に変えて得られる再帰方程式 $R'(f_k(n))$ により $e_k(n) \leqq f_k(n)$ を満たす関数 $f_k(n)$ を定義する．次に，Q_k の n 点内点集合最大化集合の候補 $A_k(n)$ を定義し，二項係数の総和を使った数式で表され，かつ，任意の k, n について $g_k(n) \leqq |\mathcal{I}(A_k(n))|$ を満たす関数 $g_k(n)$ を定義する．最後に，$g_k(n)$ が再帰方程式 $R'(g_k(n))$ を満たすことを証明することにより，任意の k, n について

$$g_k(n) = |\mathcal{I}(A_k(n))| = e_k(n) = f_k(n) \tag{1}$$

が成り立つことを証明する．

上に述べた最後の証明で，$g_k(n) = |\mathcal{I}(A_k(n))|$ が成り立つことと $A_k(n)$ による Q_k の誘導部分グラフの性質を使っている．この部分は，$g_k(n)$ を表す数式に基づいた代数的計算のみにより再帰方程式 $R'(g_k(n))$ が成り立つことを導くのが望ましい．今回の報告では，従来の証明で使われていた補題を使って再帰方程式 $R'(g_k(n))$ が成り立つことを導けることを述べる．

2 準備

この節では，文献 [1] に沿った形で定義，表記法，及び基本的命題を述べる．

$\sum_{i=1}^{k} x_k = m$ を満たす Q_k の点 $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ すべてからなる集合を Q_k の第 m 層と呼び， $W_k(m)$ で表す．

命題 1 任意の正整数 m, n について，n を m 二項係数表現と呼ぶ次の形に一意に表すことができる．

$$n = \binom{a_m}{m} + \binom{a_{m-1}}{m-1} + \cdots + \binom{a_t}{t} \tag{2}$$

但し，$t, a_m, a_{m-1}, \ldots, a_t$ は，$a_m > a_{m-1} > \cdots > a_t \geqq t \geqq 1$ を満たす整数であり，各 a_i を i 次の係数と呼ぶ．

命題 2 任意の正整数 k, m, $m \leqq k$ について，次に定義する写像 $\rho_{k,m} : \{0, 1, \ldots, \binom{k}{m} - 1\} \to W_k(m)$ は，全単射であり，かつ，$W_k(m)$ の要素 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ を第 1 成分が最下位，かつ，第 k 成分が最上位である 2 進数 $\sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} x_i$ と見なしたとき単調増加である．

$\rho_{k,m}(x) = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ とおいたとき，

$$y_i = 1 \Leftrightarrow i \in \{a_m+1, a_{m-1}+1, \ldots, a_t+1, t-1, t-2, \ldots, 1\}$$

ただし，各 a_i は x の m 二項係数表現における i 次の係数であり，$t-1, t-2, \ldots, 1$ の部分は，$t = 1$ のときは省く．

正整数 n の m 二項係数表現を $n = \binom{a_m}{m} + \binom{a_{m-1}}{m-1} + \cdots + \binom{a_t}{t}$ とおく．n に $\binom{a_m}{m-1} + \binom{a_{m-1}}{m-2} + \cdots + \binom{a_t}{t-1}$ を対応させる関数を m を基底とする K 関数と呼び，n に対する関数値を $K_m(n)$ で表す．形式的に，任意の非負整数 m に対して $K_0(m) = K_m(0) = 0$ と定義する．

---

† 岡山大学大学院自然科学研究科
Graduate School of Natural Science and Technology, Okayama University

命題 3 k, m を正整数とし，$x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in W_k(m)$ とする．さらに，$i_0 = \min\{i \mid x_i = 1\}$ とおき，第 i 成分だけが 1 で他の成分がすべて 0 である $W_k(m)$ の要素を $I_k(i)$ で表す．このとき次が成り立つ．

$$\rho_{k,m-1}(K_m(\rho_{k,m}^{-1}(x)+1)-1) = x - I_k(i_0)$$

k, n を $n < 2^k$ を満たす正整数とし，$n = \left(\sum_{i=0}^{m}\binom{k}{i}\right) - d$，$0 \leqq d < \binom{k}{m}$，とおく．このとき，$V(Q_k)$ の n 部分集合 $A_k(n)$ を $A_k(n) = (\bigcup_{i=0}^{m} W_k(i)) - \{\rho_{k,m}(0), \rho_{k,m}(1), \ldots, \rho_{k,m}(d-1)\}$ により定義し，関数 $g_k : \{0, 1, \ldots, 2^n\} \to \mathbb{Z}$ を $g_k(n) = \left(\sum_{i=0}^{m-1}\binom{k}{i}\right) - K_m(d)$, $g_k(0) = 0$, $g_k(2^k) = 2^k$ により定義する．これらの定義と命題 1, 2, 3 より，$n < 2^k$ を満たす任意の正整数 k, n について次が成り立つ．

$$g_k(n) \leqq |\mathcal{I}(A_k(n))| \tag{3}$$

3 内点数の最大値

この節では，**1** 節で述べた再帰不等式 $R(e_k(n))$ の提示と再帰方程式 $R'(f_k(n))$ の解 $f_k(n)$ の導出を述べ，最後に $R'(g_k(n))$ が成り立つことを証明する．

$n < 2^k$ を満たす任意の正整数 k, n について $e_k(n)$ は次の再帰不等式を満たさなくてはならない．

$$e_k(n) \leqq \max_{\alpha(k,n) \leqq i \leqq n/2} (e_{k-1}(i) + \min\{e_{k-1}(n-i), i\}) \tag{4}$$

ただし，$\alpha(k,n) = \max\{0, n - 2^{k-1}\}$ である．さらに，$e_0(0) = e_k(0) = 0$ 及び $e_k(2^k) = 2^k$ が成り立つ．再帰不等式 (4) は，Q_k の n 点内点集合最大化集合 S を第 1 成分が 0 である要素からなる集合 S_0 と 1 である要素からなる集合 S_1 に 2 分割し，$i = \min\{|S_0|, |S_1|\}$ とおくことにより導かれる．さらに，$f_0(0) = f_k(0) = 0$ 及び $f_k(2^k) = 2^k$ 及び

$$f_k(n) = \max_{\alpha(k,n) \leqq i \leqq n/2} (f_{k-1}(i) + \min\{f_{k-1}(n-i), i\}) \tag{5}$$

で定義される関数 $f_k(n)$ は，$e_k(n) \leqq f_k(n)$ を満たす．

次に，非負整数 m が存在して式 (5) の 3 箇所の f を g に置き換えて得られる再帰方程式が成り立つことを，

$$g_k(n) = g_{k-1}(i_{\max}) + g_{k-1}(n - i_{\max}) \tag{6}$$

が成り立つことに帰着させ，証明する．ただし，$i_{\max}$ は，$\alpha(k,n) \leqq i \leqq n/2$ の範囲で $g_{k-1}(i) + g_{k-1}(n-i)$ を最大にする i である．

命題 4 $i_{\max} = \sum_{j=0}^{m}\binom{k}{j}$ かつ $n - i_{\max} \leqq \sum_{j=0}^{m+1}\binom{k}{j}$，または，$n - i_{\max} = \sum_{j=0}^{m}\binom{k}{j}$ かつ $i_{\max} > \sum_{j=0}^{m-1}\binom{k}{j}$ を満たす非負整数 m 及び $i_{\max}$ が存在する．

命題 4 は，次の一連の補題 [1] を使って導かれる．これらの命題は，数式に基づいた代数的計算のみにより証明することができる．

補題 5 任意の正整数 m, ξ に対して $K_m(\xi) \leqq K_m(\xi + 1) \leqq K_m(\xi) + m - 1$ が成り立つ．左側の等号は, ξ の m 二項係数表現が m 個の二項係数からなるとき, かつそのときに限り成り立つ．

補題 6 任意の正整数 m および ξ に対して, $\xi \leqq m+1$ ならば $K_m(\xi) = \sum_{i=1}^{\xi}(m+1-i) = K_{m+1}(\xi) - \xi$ が成り立つ．

補題 7 m, n は $m \leqq n$ を満たす正整数とし，x および y は非負整数とする．このとき, $K_m(x) + K_m(y) \geqq K_m(x+y)$ および $\max\{x, y\} \leqq \binom{n}{m} \leqq x + y$ ならば $K_m(x) + K_m(y) \geqq K_m\left(x + y - \binom{n}{m}\right) + \binom{n}{m-1}$ が成り立つ．

補題 8 m を正整数とし, x, y を非負整数とする．このとき, $y \leqq K_m(x)$ ならば $K_m(x) + K_{m-1}(y) \geqq K_m(x+y)$ が成り立つ．

補題 9 m を正整数とし, x, y を, $0 \leqq K_m(x) < y \leqq K_m(x+1)$ を満たす整数とする．このとき, $d = y - K_m(x)$ とおけば, $y + K_{m-1}(y) = K_m(x+d) + K_{m-1}(y-d)$ が成り立つ．

4 おわりに

$n < 2^k$ を満たす任意の正整数 k, n について，Q_k の n 点内点集合最大化集合の内点集合による誘導部分グラフは，すべて同型であると予想する．

謝辞

本研究は科研費 JSPS 15K00018 の助成を受けたものである．

参考文献

[1] 神保秀司, 橋口攻三郎．ハイパーキューブの二分割コストについて．電子情報通信学会技術研究報告. COMP, コンピュテーション, Vol. 98, No. 562, pp. 25–32, 1999.