F-019

SAT問題における決定レベルに基づく動的リスタート

Dynamic Restart Based on Decision Level in SAT

楢崎 修二[1]
Shuji Narazaki

1. まえがき

命題論理式の充足問題（以下，SAT 問題）はリテラル数 N を問題の大きさとすると解空間の大きさが 2^N で表される探索問題であり，NP 完全問題である．従って，問題のサイズに対しその探索時間の期待値は急激に増加する．

一方で，変数への値割当ての順序の変更，すなわち探索方針を変えることで，同じ問題が極めて短い時間で解けることがある．このことから多くの SAT ソルバでは探索の途中で探索を頻繁に打ち切り，探索方針を変えて初期状態から改めて探索を行うリスタート戦略を使っている．このリスタート戦略は非常に有効である．

一方，リスタート戦略の適用においては，リスタートの間隔の制御が重要となる．リスタート間隔が短すぎると解にたどりつけない可能性が生じ，探索の完全性を保証することが出来ない．一方でリスタート間隔が長すぎると解の発見の短縮に結びつかないためである．Luby アルゴリズム [5], [6] は期待値が予測できない問題に対して最適なリスタート間隔（系列）を与えるヒューリスティックスであるため，いくつかの SAT ソルバで用いられている．ただし，これは静的な（問題に依らない）リスタート間隔列を与えるものであり，改善の余地があると思われる．

そこで本論文では探索中に得られる問題の特徴量によってリスタート間隔を制御する動的な制御法について考察を行う．

以下，2 章では SAT ソルバの原理とリスタートの効果について説明する．3 章で提案手法について述べ，4 章では評価を行う．5 章はまとめである．

2. SAT ソルバとリスタート

SAT ソルバは解がない問題に対して有限時間で停止する完全 SAT ソルバと，停止しない不完全 SAT ソルバとに分類される．いずれにおいてもバックトラックが必要ない**含意による割当て**と，割当てを定めることが出来ないため**バックトラック**の可能性を残して仮に値を割り当てる**決定による割当て**とを繰り返すことで解を求める．ここで決定による割当ての回数（ただしバックトラックによって未割り当てに戻されていない割当てのみを数える）を**決定レベル**と呼ぶ．問題の大きさは与えられた論理式に含まれるリテラル数や項数によって示されるが，決定レベルが大きくなる問題はバックトラックの可能性を多く持つことを意味し，これも問題の難しさを表す指標である．近年の高速完全 SAT ソルバでは矛盾が発生した場合に矛盾の理由を節として追加し（節学習），矛盾が解消できる決定レベルにまでバックトラックして未探索空間の探索を続けることで探索の大幅な高速化を達成している [2]．

決定による割当てにおいては候補となるリテラルが複数ある場合にはなんらかのヒューリスティックによって割当ての順序を決める必要があるが，この順序によって探索時間に大きな

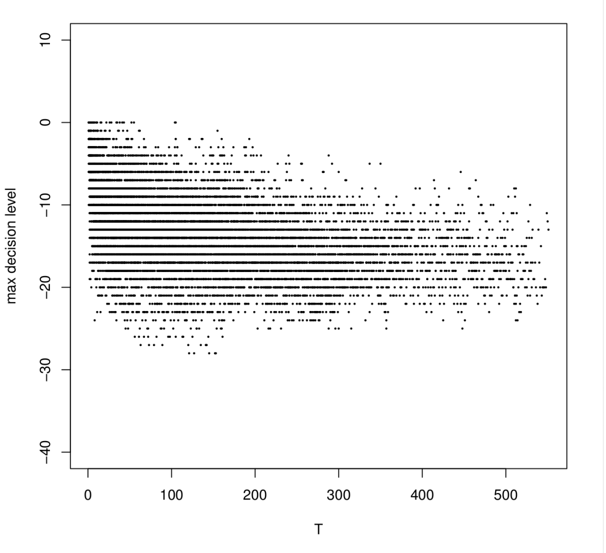

図 1 3SAT 問題におけるバックトラック順位に対する決定レベル

違いが出る．もし完全に正しい順序を見つけたならば探索は線形時間で済むからである．そこで，探索の途中であっても全ての割当てを破棄して未割当て状態に戻って探索をやり直す**リスタート**は SAT 問題においては極めて有効である [3], [4]．ただし，リスタートはその間隔の制御が重要となる．現在多くの完全 SAT ソルバは小さなリスタート間隔から始め，幾何級数などを用いてその間隔を制御している．

節学習と決定レベル，バックトラックの関連に関する研究として，Audemard らによるものを挙げる [1]．彼らは節学習を繰り返すことで，求解に至るまでに必要な決定レベルは減少するということを実験により示している．

3-SAT 問題を対象に実験を行い，この主張を確認したものが図 1，2 である．なお実験にあたっては我々が開発中の SAT ソルバ [7] を用いた．図 1 は複数の 3-SAT 問題をリスタートを行わなずに解いた場合のバックトラックの順位に対してバックトラックが発生した決定レベル（各問題における最大決定レベルを 0 とする相対値）をプロットしたものである．問題の大きさに対してバックトラック回数が非常に多くなること，際立った相関はないもののバックトラック回数が増えるにつれ，バックトラック発生の決定レベルは減少する傾向があること，などを見ることができる．

図 2 は，リスタートを行うソルバでの最後のリスタート後のリスタート順位に対する決定レベルをプロットしたものである．ここでは，以下の特徴を見ることができる．

（1）最後のリスタート後のみを対象にしているのでバックトラック回数は大きく減少する．
（2）バックトラック回数に対してその発生決定レベルの減少がより顕著に見られる．

1 長崎大学，Nagasaki University

Copyright © 2014 by
The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers and
Information Processing Society of Japan All rights reserved.

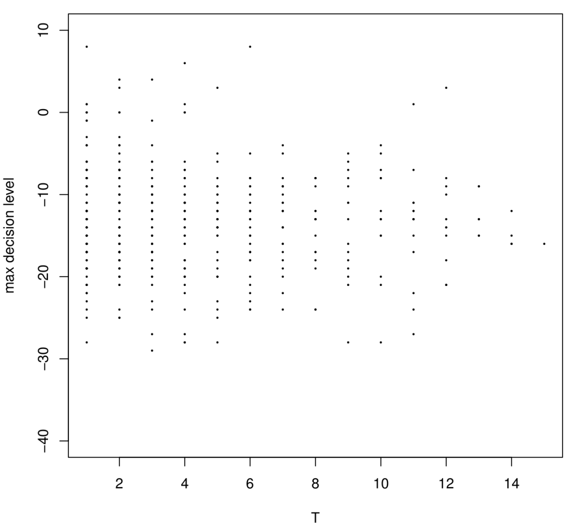

図 2　最終リスタート後の各バックトラックの決定レベル

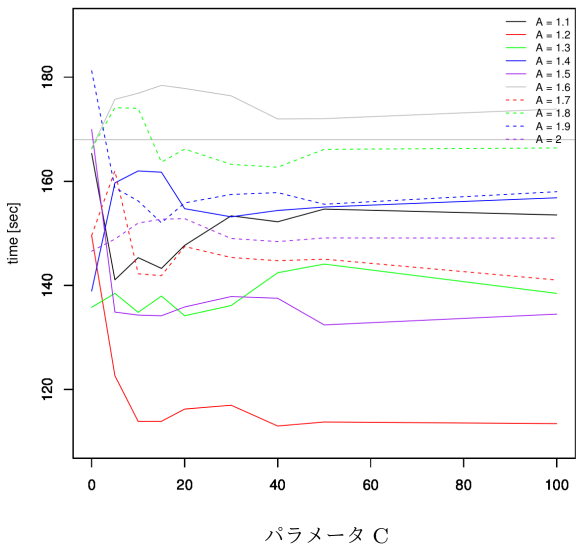

図 3　提案手法での実行時間の変化

このことから，もしリスタートによってよりよく学習が行われ，効果的に探索空間を減少させることができるならば，それ以降のバックトラックの回数がより減少する，またはバックトラックを発生する決定レベルの大きな減少が見られると考えられる．

そこで我々は後者に注目し，効果的な探索過程においてはバックトラック順位に対するバックトラック発生決定レベルは効果的に減少するはずであり，それは最終リスタート後のバックトラックの発生状況に漸近するはずである，という仮説を立てることにした．言い換えればバックトラック順位に対してバックトラック発生決定レベルが大きければ，大きな袋小路に捕まっており効果的な探索が行えていない状態にある，すなわちリスタートすべき状況にあるということである．

3.　提案手法

以上から本論文では以下の手順を用いるリスタート手法を提案する．

（1）まず問題の規模に応じてある程度探索を行ったと見做されるまで探索を行う．今回は，それまでの割当て回数 K が $B\log_2 N < K$ を満足するまで探索を行うものとした．

（2）それまでのバックトラック回数を R_1，それまでの最大決定レベルを D とし，1 回目のリスタートを行う．

（3）D を初期値として $R_k = A^k R_1$ として表される等比級数 R に従ってリスタート間隔を広げながら探索を行う．すなわち，$k-1$ 回目のリスタート以降に R_k 回目のバックトラックが発生した際に k 回目のリスタートを行う．

（4）ただし，各バックトラックにおいて最終リスタートからの発生順位を n，その決定レベルを d_n として，$1.05D - n/C < d_n$ が成立する場合にはその時点でリスタートを行う．つまりバックトラック発生レベルが負の傾きを持つ打切り直線を超えているかどうかを判定する．

ここで A，B，C が制御パラメータとなる．A および B は，我々の SAT ソルバで以前に導入されたものである．今回の実験では，これらは以前の実験で最もよいとされた値を中心に変化させる．$C = 0$ が本手法を用いない場合に対応する．

4.　実験評価

先の実験で用いた 3-SAT 問題に対して，提案手法を導入した我々の SAT ソルバで行った実験結果の一例を図 3 に示す．提案手法を使わない場合に対し，提案手法では傾き C の広い値域において，2 割程度の探索時間の改善が見られる．ただし，常に提案手法がよい結果を与えるものではない．この図においても A の値によっては C の値に依らず，悪い結果となっている．他の実験結果とも合わせると，$C = 10$ の近辺において有効である傾向が見られるが，詳細な検討が必要と思われる．

5.　まとめ

本論文では決定レベルを用いたリスタート戦略について考察し，パラメータを適切に設定することで提案手法が適切に探索過程を制御できる可能性があることを示した．決定レベルと SAT の性能とに関する関連研究としては [1] があるが，その主眼は学習節の重要度の決定にありリスタートを制御するものではない．今後はより多くの問題に適用し，本手法の有効性についてより詳細な検討を行う予定である．

参考文献

[1] Gilles Audemard and Laurent Simon. Predicting Learnt Clauses Quality in Modern SAT Solvers. In *Proceedings of the 21st International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-09)*, pages 399–404, 2009.

[2] 鍋島英知 and 栄剛秀. 高速 SAT ソルバーの原理. 人工知能学会誌, 25(1):68–76, 1 2010.

[3] Carla P. Gomes and Ashish Sabharwal. Exploiting Run-time Variation in Complete Solvers. In Armin Biere et al, editor, *Handbook of Satisfiability*, chapter 9, pages 271–288. IOS Press, 2009.

[4] Jinbo Huang. The Effect of Restarts on the Efficiency of Clause Learning. pages 2318–2323, 2007.

[5] Michael G. Luby and Michael Mitzenmacher. Analysis of random processes via and-or tree evaluation. In *SODA '98 Proceedings of the ninth annual ACM-SIAM Symposium on Discrete algorithms*, pages 364–373, 1998.

[6] Michael G. Luby, Alistair Sinclair, and David Zuckerman. Optimal speedup of Las Vegas algorithms. *Information Processing Letters*, 47(0):173–180, 1993.

[7] 楢崎修二. GC の削減を目標とする関数型言語 Haskell による高速 SAT ソルバの実装. In 情報処理学会第 *76* 回全国大会論文集, 2B-6, 3 2014.

Copyright © 2014 by
The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers and
Information Processing Society of Japan All rights reserved.