A-024

キャタピラ上のグラフ・シェアリング・ゲーム
Graph Sharing Games on Caterpillars

高橋俊彦 †　Toshihiko Takahashi
佐藤拓哉 ‡　Takuya Sato

1 はじめに

グラフ・シェアリング・ゲーム (graph sharing game) は先手アリスと後手ボブの 2 人のプレイヤーで行われる組合せゲーム (combinatorial game) である．頂点 v が非負重み $w(v)$ を持つ連結グラフ G が与えられ, アリスとボブは交互に頂点を 1 つずつ削除する．ただし, 削除済みの頂点が誘導する G の部分グラフが連結であるように頂点を選択しなければならない．G の頂点を全て取り終えたときにゲームは終了する．プレイヤーの目的はそれぞれが削除した頂点の重みの和を最大化することである．

アリスは最初に任意の (例えば最大重みの) 頂点を選択できるため, 一見有利に思えるが, 必ずしもそうではない．アリスが確実に獲得することができる重みの下界について, 以下の結果が得られている．

定理 1 (Micek and Walczak [1]) 任意の奇数個の頂点よりなる木上のゲームにおいて, アリスは全頂点の重み和の 1/4 以上を得ることができる．

図 1 に示す 9 頂点の木において, アリスは全頂点の重み和 5 のうち, 2 以上を獲得することができない．したがって, 奇数個の頂点からなる木の上のグラフ・シェアリング・ゲームにおいて, アリスが確実に獲得することができる重みは全頂点の重み和の 1/4 以上 2/5 以下であることがわかる．(上界 2/5 は現在までに知られる最良の値である [1].)

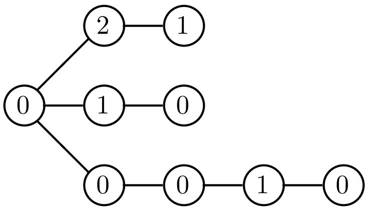

図 1　アリスが重み和の 2/5 以上を獲得できない奇数頂点の木

† 新潟大学教育研究院
‡ 佐渡汽船 (株)

Micek and Walczak の結果において, 点数の偶奇性は本質的である．アリスが全頂点の重み和のうち一定の割合を獲得することができない偶数個の頂点を持つ木の列が存在する [1]. 例えば, 図 2 は $2n$ 個の頂点からなる木であり, その n 個の内点の重みはすべて 0, n 個の葉の重みはすべて 1 である．この木上のゲームでは全頂点の重み和 n に対し, アリスが確実に獲得できる重みは 1 である．

図 2 の木はキャタピラと呼ばれるグラフのクラスに属する．本稿ではキャタピラに対し, 図 2 の木で与えられる上界がタイトであること, すなわち, 背骨の長さ s の任意のキャタピラ上のゲームにおいてアリスが全頂点の重み和の $1/s$ を獲得できることを示す.

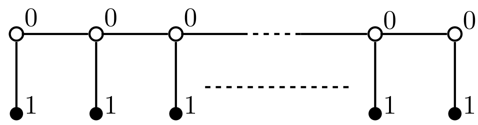

図 2　$2n$ 頂点の木

2 キャタピラ上のグラフ・シェアリング・ゲーム

キャタピラ (caterpillar) は葉 (次数 1 の頂点) を除去すると 1 本のパスになる木である (図 3)．葉の除去で残るパスを背骨 (spine) と呼ぶ．以下ではキャタピラ C の背骨をパス $c_0, c_1, \ldots, c_s (s \geq 0)$ とし, s を背骨の長さと呼ぶ．背骨の頂点 c_i に隣接する $k_i (\geq 0)$ 個の葉を $l^i_1, l^i_2, \ldots, l^i_{k_i}$ と表記する．(c_1 と c_s の次数は 1 でないため, $k_0, k_s \geq 1$ となることに注意されたい.) また, 一般性を失うことなく, $w(l^i_1) \geq w(l^i_2) \geq \cdots \geq w(l^i_{k_i})$ とする.

なお, $s = 0$ のキャタピラは c_0 を中心とするスター (star), $s = 1$ のキャタピラはダブル・スター (double star) などと呼ばれる.

ここで, 以下の定理が成り立つ.

定理 2 キャタピラ上 C のグラフ・シェアリング・ゲームにおいて, (i) $s = 0$ のときアリス (先手) は全頂点の重み

和総和の 1/2 以上を, (ii) $s > 0$ のとき, アリス (先手) は全頂点の重み和の $1/s$ 以上を得ることができる．ここで s は C の背骨の長さである．

証明． (i) アリスは常に最大重みの頂点を削除することで, 全頂点の重み和の 1/2 以上を獲得することができる: ボブが削除する頂点の重みは常に直前にアリスが削除した頂点の重み以下である．

(ii) 背骨の頂点 c_i とそれに隣接する葉 $l^i_1, l^i_2, \ldots, l^i_{k_i}$ により誘導される部分スターグラフを S_i と表す．$S_i (0 \leq i \leq s)$ の中で, 頂点の重み和が最大のものと 2 番目のものを S_a および S_b とする．このとき, アリスが S_a と S_b の頂点の重み和の 1/2 以上を獲得することができれば, 命題は成り立つ．以下にそれが常に可能であることを示そう．

一般性を失うことなく, $|w(c_a) - w(l^a_1)| \geq |w(c_b) - w(l^b_1)|, a < b$ とする．アリスは 1 手目に c_a と l^a_1 の重い方を削除する．以後, ボブが S_a の頂点を削除した直後に S_a の頂点が残っているなら, その中で重み最大のものを削除する．この戦略により, [アリスが S_a から得る重み]−[ボブが S_a から得る重み] $\geq |w(c_a) - w(l^a_1)|$ となる．

一方, 削除された頂点は連結グラフを誘導しなければならないため, S_b の頂点で最初に削除されるのは c_b となる．もし, アリスが c_b を削除することができれば, 以後, ボブが S_b の頂点を削除した直後に S_b の頂点が残っているなら, その中の重み最大のものを削除することで, [アリスが S_b から得る重み]−[ボブが S_b から得る重み] $\geq w(c_b) - w(l^b_1)$ となる．

以上から, [アリスが S_a と S_b から得る重み]−[ボブが S_a と S_b から得る重み] $\geq |w(c_a) - w(l^a_1)| + w(c_b) - w(l^b_1) \geq |w(c_a) - w(l^a_1)| - |w(c_b) - w(l^b_1)| \geq 0$. すなわち, アリスは S_a と S_b の頂点の重み和の 1/2 以上を得ることができる．

そこで, アリスが 1 手目に c_a を削除したとき, ボブが c_b を削除することが可能であるとしよう．(これは $a = b - 1$, すなわち c_a と c_b が隣接している場合, あるいは $S_1, \ldots, S_{b-2}$ の頂点数の合計が奇数の場合である.)

アリスはボブが S_b の頂点を削除した直後に S_b の頂点が残っているなら, その重み最大のものを削除することで, $W_a = w(l^b_1) + w(l^b_3) + w(l^b_3) + \cdots$ 以上の重みを S_b から獲得できる．一方, ボブは $W_b = w(c_b) + w(l^b_2) + w(l^b_4) + \cdots$ 以上の重みを S_b から獲得できる．ここで, $|w(c_a) - w(l^a_1)| < W_b - W_a$ であれば, アリスが S_a と S_b から獲得する重みの和はボブより少なくなる可能性がある．したがって, この場合はアリスは 1 手目に c_b を削除することにする．このとき, S_b からアリスは W_b 以上, ボブは W_a 以上の重みを得ることができる．

アリスが 1 手目に c_b を削除することで, ボブが c_a を削除することができるようになったとしても, ボブが S_a から得る重みは, アリスが 1 手目に c_a あるいは l^a_1 を削除したときに S_a から得る重みより多くなることはない．アリスが c_a を削除するのであれば, ボブが S_a から得る重みはアリスより $|w(c_a) - w(l^a_1)|$ 以上に多くなることはない．いずれの場合も, アリスは S_a と S_b の頂点の重み和の 1/2 以上を得ることができる．

□

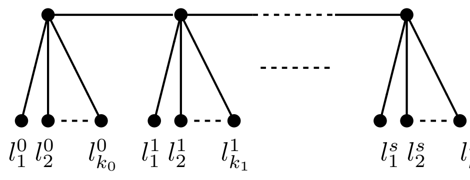

図 3　キャタピラ

3　おわりに

本稿では背骨の長さ s のキャタピラ上のグラフ・シェアリング・ゲームにおいて, 先手アリスが全頂点の重みの $1/s$ を獲得できることを示した．すなわち, スターあるいはダブルスター上のゲームであれば, アリスは必勝 (負けない) 戦略を持つことになる．

キャタピラというグラフのクラスは非常に小さいように思えるが, キャタピラの背骨をクリークやスターで置き換えたグラフ, すなわちクリークやスターの各頂点にペンダント (次数 1 の頂点) を付加したグラフ上のゲームに対しても定理 2 と同様の結果を示すことができる．

なお, グラフ・シェアリング・ゲームは Peter Winkler のピザ問題 [3] をグラフ上のゲームへと一般化したものである．同様のゲームに (頂点を削除して) 残った部分グラフが連結であることを要請するグラフ・グラビング・ゲーム (graph-grabbing game) などがある [2].

参考文献

[1] Piotr Micek and Ba. Walczak: "Parity in graph sharing games," Discrete Mathematics, 312(10), pp.1788-1795, 2012.

[2] P. Micek and B. Walczak: "A graph-grabbing game," Combinatorics, Probability and Computing, 20 (4), pp.623-629, 2011.

[3] P.M. Winkler, "Problem posed at Building Bridges, a conference in honour of 60th birthday of László Lovász, Budapest, 2008.