

地域制約の下での戦略的操作不可能なマッチングメカニズム

橋本 直幸*
Hashimoto Naoyuki

上田 俊*
Suguru Ueda

岩崎 敦*
Atsushi Iwasaki

安田洋祐†
Yosuke Yasuda

横尾 真*
Makoto Yokoo

1 序論

学生と学校、研修医と病院、労働者と企業のように、二種類のエージェント間の望ましい組合せを求めるマッチング理論に関する研究が盛んであり、詳細なサーベイとして文献 [10] 等が存在する (本論文では二種類のエージェントを示すために学生と学校という用語を用いる)。既存研究では、ある学校に割り当てられる学生数に上限が課せられるといった、個別の上限制約が考慮されていた。しかしながら、現実の応用問題を考えると上限制約のみでなく、ある学校に割り当てられる学生数が一定の人数以上であることを要求するといった、下限制約が必要となる場合が存在する。さらに、これらの上限 / 下限制約は、個別の学校に対してではなく、学校の集合 (地域) に対して課せられる可能性がある。

このようなモデルが必要とされる具体的な応用例として、研修医と病院のマッチングがある。例えば、政策決定者は、ある離島の複数の病院に対して一定の数以上の研修医が配属されることが望ましいと考えているとする。しかしながら政策決定者は、これらの研修医が具体的に離島内の複数の病院にどのように配属されるかに関して必要以上の干渉をする意志はなく、対象となる研修医と病院の選好 / 優先順位に応じて決められるべきであると考えているとする。このような政策決定者のマッチングの結果に関する要求条件は、地域下限制約を用いて自然に表現可能である。

表 1 に、地域上限 / 下限制約に関する既存の研究 (および本論文での新しい貢献) を示す。個別の上限制約は必須として、地域制約に関しては、重要な特殊例である地域制約が階層的な構造を持つ場合と、一般の場合に分類して考えると、上限制約に関しては、個別の上限制約のみ、階層的な地域上限制約、一般的な上限制約の 3 通り、下限制約に関しては、下限制約なし、個別の下限制約のみ、階層的な地域下限制約、一般的な下限制約の 4 通りの可能性があり、合計で $3 \times 4 = 12$ 通りの組合せが考えられる。個別の上限が存在する場合には、その場合においてフェアで無駄がなく、かつ戦略的操作不可能であるという望ましい性質を持つ deferred acceptance (DA) メカニズムが広く知られている。文献 [3, 7] では階層的な上限が存在する場合のメカニズムを提案している。一方で、文献 [5] では個別の下限制約を扱うメカニズムを提案しているが、上

限と比較して下限制約に関する研究例が少ない。残された数多くの組み合わせに関しては、未だ十分な研究が行われていないのが現状である。

そこで本論文では、表の太字で示す範囲の組合せに関して検討を行う。より詳細には、本論文ではまず、一般の場合の地域制約を満たす (実行可能な) マッチングが存在するか否かを問う決定問題の計算量が NP 完全であることを示す。次に本論文では、serial dictatorship with regional quotas (SDRQ) および multi-stage DA with regional quotas (MSDARQ) と呼ばれる、階層的な地域下限制約および個別の上限制約が存在する場合に適用可能なメカニズムを提案する。これらが戦略的操作不可能かつ無駄がなく、すべての学校で共通である学生のランキング (マスターリスト) の下でフェアであることを示す。

本論文では地域制約を直接扱うメカニズムを開発することを目指としている。異なるアプローチとして、地域制約を個別制約に変換して扱う方法が存在する。具体的には、このアプローチでは、個別制約が満足されれば自動的に地域制約が満足されるように、人為的に厳しい個別制約を設定する。このような変換を行えば個別制約のみが扱える既存のメカニズムを用いることが可能となる。このようなアプローチを人為的キャップアプローチと呼ぶ。しかしながら、人為的キャップアプローチでは制約を満足するマッチングの可能性を人為的に厳しく制限しているため、得られる結果に対する学生の満足度や公平性が著しく損なわれる可能性がある。シミュレーションによる評価により、本論文で新しく提案したメカニズムは、人為的キャップアプローチと比較して、地域制約をより柔軟に扱うことを可能にしており、学生の満足度および公平性の観点で人為的キャップアプローチよりもはるかに優れていることを示す。

表 1 地域制約の下でのメカニズムの分類 (*:本論文で得られた結果, KK: Kamada and Kojima, 2012, BFIM: Biro *et al.*, 2010).

	Maximum quotas			
Minimum quotas		individual	hierarchical regions	general regions
	none	DA	KK/BFIM	NP- complete*
	individual	MSDA	open	
	hierarchical regions	MSDARQ* SDRQ*		
	general regions	NP-complete*		

* 九州大学大学院システム情報科学府

† 政策研究大学院大学

2 モデル

地域制約が存在する場合の学生と学校の間のマッチング問題は $(S, C, R, p, q, \succ_S, \succ_C, \succ_{ML})$ の組で定義される. $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ は学生の集合, $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ は学校の集合であり, $n = |S|, m = |C|$ とする. また, $R = \{r_1, r_2, \dots\}$ は地域の集合であり, 各地域 r は, 学校の部分集合 $r \in 2^C \setminus \emptyset$ として与えられる. $p = (p_r)_{r \in R}$ と $q = (q_r)_{r \in R}$ は地域下限と上限のベクトルであり, すべての $r \in R$ に関して $0 \leq p_r \leq q_r$ が成立する. 各学生 s は学校に対して厳密な選好順序 $\succ_s$ を持つ. また, 同様に各学校 c は, 学生に関して個別の優先順位 $\succ_c$ を持つ. これらの順序関係のベクトルを, 学生に関して $\succ_S = (\succ_s)_{s \in S}$, 学校に関して $\succ_C = (\succ_c)_{c \in C}$ と表記する. 各学校の学生に対する個別の優先順位は, 成績等の客観的な基準に基づいて定められることが通例であり, 公知となっているとする. また, 学校個別の優先順位に加えて, マスターリスト (Master List, ML) [6] と呼ばれる学生間の順位付けが存在することを仮定する. この仮定はマッチング理論の研究において頻繁に用いられており [8, 9, 2], GPA や TOEFL のスコアなどを想定している. ML と学校個別の優先順位の間には, 何らかの相関があると考えられるが, 本論文で提案するメカニズムの理論的性質は, こうした相関の有無には影響されない. 以下, 一般性を失うことなしに, マスターリストでの順位は, $s_1 \succ_{ML} s_2 \succ_{ML} \dots \succ_{ML} s_n$ であることを仮定する. さらに, 各学校および各学生に関して, すべての学生およびすべての学校は許容可能であることを仮定する (学生 / 学校に対して, 特定の学校 / 学生を許容不可能とした場合, すべての学校の下限制約を満足することは一般には不可能である).

マッチングは以下の性質を満たすマッピング $\mu: S \cup C \rightarrow S \cup C$ である: (i) すべての $s \in S$ に関して $\mu(s) \in C$, (ii) すべての $c \in C$ に関して $\mu(c) \subseteq S$, (iii) すべての s および c に関して $s \in \mu(c)$ の場合, かつその場合に限り $\mu(s) = c$. また, マッチングは以下の性質を満たす場合に実行可能であるという: $\forall r, p_r \leq \sum_{c \in r} |\mu(c)| \leq q_r$ が成立.

以下, マッチングが満たすべき望ましい性質として, 無駄がない, およびフェアという性質を示す. ここで, 学校 c を要素に持つ r の集合を $regions(c)$ と表記する.

定義 1. マッチング μ において, 学生 s , 学校 c に関して, 以下の条件が成立する場合, 学生 s は学校 c の空きシートを要求するという: (i) $c \succ_s \mu(s)$, (ii) $\forall r \in regions(c), \sum_{c' \in r} |\mu(c')| < q_r$, および (iii) $\forall r \in regions(\mu(s)), \sum_{c' \in r} |\mu(c')| > p_r$.

マッチング μ において, 空きシートを要求する学生が存在しない場合, マッチングは無駄がないという.

言葉で説明すると, 学生 s は, 自分が割り当てられた学校 $\mu(s)$ よりも, 他の学校 c を好んでおり, かつ, s の割り当てられる学校を, $\mu(s)$ から c に変更しても, c と c を含む任意の地域の上限制約, および $\mu(s)$ と $\mu(s)$ を含む任意の地域の下限制約が満足される場合, s は c の空きシートを要求するという.

定義 2. マッチング μ において, 学生 s に関して以下の条件が成立する場合, s は, 別の学生 s' に対して妥当な不満を持つという: $\mu(s') \succ_s \mu(s)$ かつ $s \succ_{\mu(s')} s'$. マッチング μ において, 妥当な不満を持つ学生が存在しない場合, マッチングはフェアであるという.

言葉で説明すると, 学生 s は, 自分が割り当てられた学校 $\mu(s)$ よりも, 他の学生 s' が割り当てられた学校 $\mu(s')$ を好んでおり, かつ, 学校 $\mu(s')$ の優先順位において s が s' より上位の場合, s は s' に対して妥当な不満を持つという.

これらの要求条件は自然であるが, 個別の上限 / 下限制約のみが存在する場合においても, フェアかつ無駄のないマッチングが存在しない場合があることが示されている [4]. このため, ML を用いて, マッチングがフェアであるという定義を緩めた, ML の下でフェアという概念を導入する.

定義 3. マッチング μ において, 学生 s に関して以下の条件が成立する場合, s は, 別の学生 s' に対して, 強い意味で妥当な不満を持つという: $\mu(s') \succ_s \mu(s), s \succ_{\mu(s')} s'$ かつ $s \succ_{ML} s'$. マッチング μ において, 強い意味で妥当な不満を持つ学生が存在しない場合, マッチングは ML-フェアであるという.

ここでは, 強い意味で妥当な不満を持つためには, s が s' よりも ML で上位であるという追加の条件を与えている.

メカニズムは, 学生の選好順序のベクトルを入力として, マッチングを返す関数である. メカニズムが無駄がないとは, 任意の学生の選好順序のベクトルに対して, 必ず無駄のないマッチングを与えることをいう. 同様にメカニズムが (ML-) フェアであるとは, 任意の学生の選好順序のベクトルに対して, (強い意味で) 妥当な不満を持つ学生が存在しないマッチングを与えることをいう. また, メカニズムが戦略的操作不可能であるとは, どの学生も, 他の学生の行動に関わらず, 自身の選好順序を偽って申告する誘因を持たないことをいう.

3 実行可能なマッチングを求める計算量

3.1 一般の場合

あるマッチング問題のインスタンスが与えられた場合, 最初にチェックすべきこととして, すべての制約を満足する実行可能な割当てが存在するか否かを判定することがある. 通常の個別の上限制約のみが存在する場合には, この判定は簡単であり, 学生数 n が個別の上限の合計以下であればよい. しかしながら, 地域上限 / 下限の導入により, この判定ははるかに難しくなり, 以下の定理に示すように NP 完全となる.

定理 1. 与えられた S, C, R, p , および q に関して, 実行可能なマッチングが存在するか否かの判定問題は NP 完全である. これは, 任意の $r \in R$ に関して, $|r|$ が 1, 2, もしくは 3 のいずれかのみであり, $|r| = 3$ のときに限り p_r は 1 で, その他の場合に 0 であり, $|r| = 3$ のときに限り q_r は 3 で, その他の場合に 1 である特殊ケースに限定しても成立する.

証明. 与えられたマッチングがすべての制約を満たすかどうかのチェックは多項式時間で可能なので, この判定問題はクラス NP に属することは明らかである. 以下に, 任意の 3-SAT 問題のインスタンスが, この問題に帰着できることを示す. よく知られている 3-SAT 問題は, 論理変数の集合 X と節の集合 L で定義される. 各節 l は, 例えば $x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$ のような 3 つのリテラルの選言であり. 各リテラルは, 論理変数 $x \in X$ もしくはその否定 $\neg x$ である.

与えられた 3-SAT 問題のインスタンスに対して, それと等価なマッチング問題を以下のように構成する. 各リテラル, すなわち論理変数 x とその否定 $\neg x$ のそれぞれに対して, 対応する学校を作る. また, x と $\neg x$ のペアは地域を構成し, その地域の上限制約は 1 で, 下限制約は 0 である. また, 各節 $l \in L$ に関して, l に含まれる学校は地域を構成し, その地域の下限制約は 1 であり, 上限制約は 3 である. また, 各学校は, それのみからなる地域を構成し, その下限制約は 0 で, 上限制約は 1 である. 学生の総数 n は, 論理変数の数 $|X|$ に等しい.

ここで, ある学校に一人の学生が割当てられている場合, その学校に対応するリテラルが真であると解釈し, そうでなければ偽であると解釈すると, 実行可能なマッチングと, すべての節を充足する各変数への真偽値の割当ての間に一対一の対応が成立する. よって, 実行可能なマッチングが存在すれば 3-SAT 問題は充足可能であり, 実行可能なマッチングが存在しなければ, 3-SAT 問題は充足不可能である. $\square$

上記の定理により, 地域上限制約と地域下限制約の両方が存在する場合, 実行可能なマッチングが存在するか否かの判定問題は NP 完全であることが示された. 一方, 地域下限制約のみ, もしくは地域上限制約のみが存在する問題に関しては, 実行可能なマッチングを求める問題は, より簡単であるように思われる. しかしながら地域上限制約は, 地域下限制約に書き換えることが可能であり, 逆も成立する. より詳細には, 地域 r に関する下限制約 p_r は, r の補集合となる地域 $\bar{r} = C \setminus r$ に関する上限制約 $q_{\bar{r}} = n - p_r$ に置き換えることができる. よって, 以下の定理が成立する.

定理 2. 与えられた S, C, R, p , および q に関して実行可能なマッチングが存在するか否かの判定問題は NP 完全である. これは, 上限制約のみが存在する場合, もしくは下限制約のみが存在する特殊ケースに限定しても成立する.

3.2 階層的な地域制約

一般の場合の実行可能性のチェックは NP 完全であるため, 以下, 本論文では地域制約が階層的な場合を対象とする. 同様な階層的モデルは文献 [3, 7] でも扱われている.

定義 4 (階層的な地域). 地域の集合 R は以下の性質を満たす場合に階層的であるという. $r \neq r'$ である $\forall r, r' \in R$ に関して, 以下のいずれかが成立する: (i) $r \cap r' = \emptyset$, (ii) $r \subset r'$, もしくは (iii) $r' \subset r$.

前節で述べた変換方法により, すべての地域下限制約は地域上限制約に変換可能である. 一般に, 下限制約は上限制約よりも扱い難いと考えられており既存研究も少ない. すべての地域下限制約を地域上限制約に変換し, 既存の地域上限制約を扱うメカニズム [3, 7] を適用するといったアプローチも考えられるが, 個別の下限制約を地域上限制約に変換した場合, これらの地域上限制約は階層的にはなり得ない. よって, 文献 [3, 7] に示されている階層的上限制約を扱うメカニズムを, 変換した問題に適用することは不可能である.

本論文では以下に示す, 階層的な地域下限制約が存在する場合のマッチング問題を扱う. まず, 個別の学校 c に関しては, 下限および上限制約を設定可能であるとする. すなわち, $\forall c, \{c\} \in R$ に関して, 下限 / 上限制約 $p_{\{c\}}$ と $q_{\{c\}}$ が与えられる. さらに, $|r| > 1$ である各地域 $r \in R$ に関しては, 地域下限制約 p_r は与えられるが, 地域上限制約 q_r は存在しない, すなわち, 地域に関しては下限制約のみが設定可能である場合を対象とする (表 1).

地域の集合 R が階層的である場合, R は木構造で表現可能である. ここで, 一般性を失うことなしに, すべての学校の全体集合である C が R に含まれることを仮定する.

定義 5 (木). 地域の集合 R を表現する木 T_R は以下のように定義される: (i) ルートノード C はすべての学校の全体集合である, (ii) 葉ノード $\{c\}$ は, 個別の学校 $c \in C$ のみから構成される地域である, (iii) $r \neq C$ である各ノード $r \in R$ に関して, その親ノード r' は, r の真上位集合であり, 要素数 $|r'|$ が最小のものである.

r に関して, その子ノードの集合を $children(r)$ と表記する. 明らかに, $r = \bigcup_{r' \in children(r)} r'$ が成立する. 以下, ノードと地域という用語を同じ意味で用いる.

葉ノード以外のノード $r \in R$ に関しては, その上限制約 q_r を $\sum_{c \in r} q_{\{c\}}$ とする. この上限制約の値は, 個別の上限制約から内生的に決められる値であり, 実行可能なマッチングには影響を与えない. この定義より明らかに, $q_r = \sum_{r' \in children(r)} q_{r'}$ が成立する. 本論文では以下, 地域制約に関するいくつかの用語と定義の導入を行う. これらは次章で示すメカニズムの基礎となるものである.

まず, 地域下限制約が有効となるための条件を定義する.

定義 6 (ノードの無矛盾性). ノード $r \in R$ は, $p_r \geq \sum_{r' \in children(r)} p_{r'}$ もしくは $|r| = 1$ である場合に無矛盾であるという.

定義 7 (下限制約の修正). もしノード r が矛盾している場合, r の地域下限制約 p_r を $\sum_{r' \in children(r)} p_{r'}$ とすることにより, ノードを無矛盾にできる.

この修正により, 実行可能なマッチングの集合は変化しないことは明らかである.

地域制約が一般の場合とは対照的に, 下限制約が階層的な

場合には、実行可能なマッチングが存在するか否かの判定は、下限制約の修正を行うことにより、ノード数に関する線形時間で行うことができる。

定理 3. 与えられた S, C, R, p, q , および T_R に関して、実行可能なマッチングが存在するか否かの判定問題は T_R のノード数に関する線形時間で解くことができる。

証明. 以下にこの問題を解く手続きを示す。 T_R のノードに関して、下限制約の修正を深さ優先順で実行する。もしあるノード $r \in R$ に関して、 $p_r > q_r$ が成立すれば、実行可能なマッチングは存在しない。そうでなければ、 $p_C \leq n \leq q_C$ が成立する任意の n に関して実行可能なマッチングが存在する。

明らかに、あるノード $r \in R$ に関して $p_r > q_r$ となれば、実行可能なマッチングは存在し得ない。また、 $p_C \leq n \leq q_C$ が成立するならば、ルートノードからスタートして、学生をいくつかのグループに分割し、再帰的に子ノードに対してそれらのグループを割り当てることにより、すべての地域上限 / 下限制約を満たす、個別の学校に対する割当てを求めることができる。この手続きは T_R のノード数に関する線形時間で終了することは明らかである。

□

本論文では、学生の部分集合に関するマッチングを決定し、さらに残りの学生の部分集合に関するマッチングを決定していく逐次的なメカニズムを構築する。以下に、部分マッチングに関するいくつかの概念を導入する。

定義 8 (実行可能木). 木 T_R は、 $\forall r \in R$ に関して、 $p_r \leq q_r$ が成立する場合に実行可能であるという。

定義 9 (制約の更新). n 以下の k 人の学生に関する部分マッチング ν を木 T_R に適用した場合、 T_R の制約は以下のように修正される。

1. 各ノード r に関して、 $p_r \leftarrow \max(0, p_r - \sum_{c \in r} |\nu(c)|)$.
2. 各葉ノード $\{c\}$ に関して、 $q_{\{c\}} \leftarrow q_{\{c\}} - |\nu(c)|$.
3. 葉ノード以外の各ノード r に関して、 $q_r \leftarrow \sum_{c \in r} q_{\{c\}}$.
4. さらに、 T_R に関する深さ優先順で下限制約の修正を行う。

定理 4. 部分マッチング ν を木 T_R に適用した後に、 T_R が実行可能であるのは、事前条件として、すべての学校 c に関して、 $|\nu(c)| \leq q_{\{c\}}$ が成立する場合、かつその場合に限る。

詳細な証明は割愛するが、いずれかの c で $|\nu(c)| > q_{\{c\}}$ となる場合には T_R が実行不可能となることは明らかである。また、すべての c で $|\nu(c)| \leq q_{\{c\}}$ が成立する場合には、定義 7 と定義 9 に基づいて更新された制約に関して、実行可能性の条件 $p_r \leq q_r$ が成立することを、葉ノードからルートノードに至るまで、再帰的に証明することができる。

次に、木が無矛盾であるということを以下に定義する。

定義 10 (無矛盾な木). 木 T_R が実行可能であり、学生の数を

n' として $p_C \leq n' \leq q_C$ が成立する場合、 T_R は学生数 n' に関して無矛盾であるという。

定理 5. 学生数 n' に関して無矛盾な木 T_R に対して、 k 人の学生に関する部分マッチング ν を適用する際、部分マッチング ν を適用する前の制約に関して、 $k \leq n' - p_C$ が成立し、かつ、任意の学校 c に関して、 $|\nu(c)| \leq q_{\{c\}}$ が成立するなら、部分マッチング ν を T_R に適用した木 T'_R は実行可能であり、 $n' - k$ に関して無矛盾である。

証明. 定理 4 より、 ν を T_R に適用した木を T'_R とすると、 T'_R は実行可能である。次に、 T'_R に関する制約を p'_C および q'_C として、 $p'_C \leq n' - k \leq q'_C$ が成立すること、すなわち T'_R は $n' - k$ に関して無矛盾であることを示す。仮定より T_R は n' に関して無矛盾であることより、 $p_C \leq n' \leq q_C$ が成立する。また、 $k \leq n' - p_C$ が成立する。さらに、定義 9 および ν は k 人の学生に関する部分マッチングであることから、 $p'_C \leq p_C$ および $q'_C = q_C - k$ が成立する。よって、 $p'_C \leq p_C \leq n' - k \leq q_C - k = q'_C$ が成立する。□

以下に、新たな内生的なパラメータである、要素的下限制約を導入する。要素的下限制約は地域 r に含まれる学校に学生が割当て可能か否かを判定するために有用である。

定義 11 (要素的下限制約). 地域 r に関する要素的下限制約 a_r は以下のように求められる: r が葉ノードの場合、 $a_r = p_r$. その他の場合、 $a_r = p_r - \sum_{r' \in \text{children}(r)} p_{r'}$.

明らかに、 $p_C = \sum_{r \in R} a_r$ が成立する。直感的には要素的下限制約は、全体の下限制約の総量 p_C を、各地域に重複なく分割した量と考えることができる。

定理 6. n' 人の学生に対して無矛盾な木 T_R 、一人の学生 s を学校 c に割り当てる部分マッチング ν を考える。 ν を T_R に適用した後の木 T'_R が $n' - 1$ に関して無矛盾であるのは、以下の条件のいずれかが成立する場合、かつその場合に限る。

Case 1: $p_C < n' \leq q_C$ および $q_{\{c\}} > 0$ が成立。

Case 2: $p_C = n' \leq q_C$, $q_{\{c\}} > 0$ および $\exists r \in \text{regions}(c), a_r > 0$ が成立。

証明. まず、上記の条件が成立する場合に、 T'_R が $n' - 1$ に関して無矛盾であることを示す。まず、Case 1 の条件が成立する場合には、定理 5 より、 T'_R は実行可能であり、 $n' - 1$ に関して無矛盾である。また、Case 2 の条件が成立する場合には、定理 4 より、 T'_R は実行可能である。また、前提より、 $a_r > 0$ が成立する地域 $r \in \text{regions}(c)$ が存在する。この地域 r に関して、 $a_r = p_r - \sum_{r' \in \text{children}(r)} p_{r'} > 0$ が成立すること、また、 $c \in r$ にのみ学生が一人割り当てられることから、 $p_r > \sum_{r' \in \text{children}(r)} p_{r'} > \sum_{r' \in \text{children}(r)} p'_{r'}$ が導かれる。さらに、 $p_r > 0$, $p_r > p_r - 1$ および $p_r > \sum_{r' \in \text{children}(r)} p_{r'}$ が成立すること、および p'_r は $\max(0, p_r - 1, \sum_{r' \in \text{children}(r)} p'_{r'})$ で与えられることから、 $p_r > p'_r$ が導かれる。さらに、 ν では

学生一人が割り当てられることから, $p'_r = p_r - 1$ が成立する.

次に, r'' を r の親ノードとする. この r'' に関して, 更新された下限制約 $p'_{r''}$ は $\max(0, p_{r''} - 1, \sum_{r' \in \text{children}(r'')} p'_{r'})$ で与えられる. また, $p_{r''} \geq p_r$ より, $p_{r''} > 0$ が成立する. さらに, 各 $r' \in \text{children}(r'')$ に関して, もし $r' = r$ であれば $p'_{r'} = p_r - 1$ が成立し, $r' \neq r$ であれば $p'_{r'} = p_{r'}$ が成立する. よって, $p'_{r''} < p_{r''}$ が成立する. このことは, $p'_{r''} = p_{r''} - 1$ であることを意味する. 同様な議論を, r'' の祖先ノードに関して適用することにより, ルートノード C で $p'_C = p_C - 1$ が成立する. $p_C = n' \leq q_C$ および $q'_C = q_C - 1$ より, $p'_C = n' - 1 \leq q'_C$ が成立する.

次に, 上記の条件が成立しない場合には, T'_R は $n' - 1$ と無矛盾にはなり得ないことを示す. $q_{\{c\}} \leq 0, n' < p_C, n' > q_C$ のいずれかが成立する場合には, 明らかに T'_R は実行不可能である. また, $p_C = n'$ かつ $\forall r \in \text{regions}(c), a_r = 0$ が成立する場合, 定義 11 より, 葉ノード $\{c\}$ において, $p_{\{c\}} = p'_{\{c\}} = 0$ が成立する. よって, 制約の更新によって $\{c\}$ の下限制約は減少しない. 同様に, $\{c\}$ の親ノードでも下限制約は減少しない. 同様の議論を祖先ノードに関して繰り返すことにより, ルートノード C において下限制約の値は減少しないことが示される. よって $p'_C = p_C$ が成立する. 従って $p'_C > n' - 1$ となり, T'_R が $n' - 1$ に関して矛盾することが示される. $\square$

4 階層的下限制約を扱うメカニズム

4.1 地域下限制約の下での逐次的独裁者メカニズム

まず, 地域下限制約の下での逐次的独裁者メカニズム (Serial Dictatorship with Regional Quotas, SDRQ) と呼ばれるメカニズムを示す. このメカニズムは, 定理 6 で得られた結果に基づいており, ML で与えられる順序に従って, 一人の学生 s を逐次的に選択し, s の割当てを決定する.

ここで, μ^k を Stage k における部分マッチングとし, μ を最終的なマッチングとする. このメカニズムでは, 初期状態では各地域 $r \in R$ に関して, $p_r^1 = p_r, q_r^1 = q_r$, および $a_r^1 = a_r$ のように制約を決定し, $k = 1$ として以下の手続きを開始する.

Stage $k \geq 1$

Step 1: ML に従って, 上位から k 番目の学生 s_k を選択する.

Case 1: $p_C^k < n - (k - 1)$ の場合, 学生 s_k は, まだ個別の上限制約に達していない ($q_{\{c\}}^k > 0$ である) 学校中で, 最も選好する学校 c を選択する.

Case 2: $p_C^k = n - (k - 1)$ の場合, 学生 s_k は, $q_{\{c\}}^k > 0$ および $\exists r \in \text{regions}(c), a_r^k > 0$ が成立する学校中で, 最も選好する学校 c を選択する.

Step 2: 部分マッチング μ^k を, $\mu^k(c) = \{s_k\}, \mu^k(s_k) = c$ とする.

Step 3: μ^k を現在の木に適用し, 定義 9 に従って更新された制約を p_r^{k+1}, q_r^{k+1} , および a_r^{k+1} とする. $k = n$ なら終了, そうでなければ $k \leftarrow k + 1$ として Step 1

に戻る.

以下, $q_{\{c\}}^k = 0$ となる学校 c は満員であるといい, $\forall r \in \text{regions}(c), a_r^k = 0$ となる学校 c は飽和しているという.

例 1. 学生 8 人 $S = \{s_1, \dots, s_8\}$ と学校 4 校 $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ が存在すると仮定する. 地域の集合 R は $\{\{c_1, c_2, c_3, c_4\}, \{c_1, c_2\}, \{c_3, c_4\}, \{c_1\}, \{c_2\}, \{c_3\}, \{c_4\}\}$ で与えられる. また, 各学校 c に関して, 個別の下限制約 $p_{\{c\}}$ は 1 であり, c_1 の個別の上限制約, すなわち $q_{\{c_1\}}$ は 1 であり, c_1 以外の学校に関しては個別の上限制約は 4 とする. その他の地域に関して, $p_{\{c_1, c_2\}} = 2$, および $p_{\{c_3, c_4\}} = 4$ である. この状況で, 要素的下限制約は $a_{\{c_1, c_2\}} = 0$ および $a_{\{c_3, c_4\}} = 2$ となる. 学生および学校の選好 / 優先順位は以下で与えられる.

$\succ_{s_1}, \succ_{s_2}, \succ_{s_3}, \succ_{s_4}$:	c_1	c_2	c_3	c_4 ,				
$\succ_{s_5}, \succ_{s_6}, \succ_{s_7}, \succ_{s_8}$:	c_2	c_1	c_4	c_3 .				
$\succ_{c_1}, \succ_{c_2}$:	s_8	s_7	s_6	s_5	s_4	s_3	s_2	s_1 ,
$\succ_{c_3}, \succ_{c_4}$:	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8 ,
$\succ_{ML}$:	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8 .

SDRQ の Stage 1 では, 学生 s_1 の割当てを決定する. $p_C^1 = 6$ かつ $n - (k - 1) = 8 > 6$ で, 各学校は満員でないため, 学生 s_1 は最も選好する学校 c_1 に割り当てられる. 同様に, Stage 5 までは, $n - (k - 1) > p_C^k$ が成立するため, s_2 から s_4 までの学生は, 満員でない最も選好する学校に割当て可能であり, s_2, s_3, s_4 は c_2 に割り当てられる. 一方, Stage 5 では, $p_C^5 = 4$ および $n - (k - 1) = 4$ が成立するため, 学生 s_5 は満員でなく, かつ飽和していない学校のみを選択できる. ここで, c_1 と c_2 は飽和しているため, 学生 s_5 は c_4 を選択する. 同様に, Stage 6 から 8 では, 各学生は満員でなく, かつ飽和していない学校のみを選択できる. 最終的に得られるマッチングは以下で与えられる:

$c_1 :$	s_1								$c_3 :$	s_8		
$c_2 :$	s_2	s_3	s_4						$c_4 :$	s_5	s_6	s_7

定理 7. $p_C \leq n \leq q_C$ が成立している場合, SDRQ は常に実行可能なマッチングを与える.

定理 6 より, 各ステージでの木が実行可能であり, 残りの学生数と無矛盾であることから, 定理 7 が成立することは明らかである.

定理 8. SDRQ は戦略的操作不可能, パレート効率的, かつ ML-フェアである.

証明. 逐次的独裁者 (Serial Dictatorship, SD) メカニズムは, 一般に以下の性質を満たすメカニズムとして定義される. 参加者は, あらかじめ決められた順序で選ばれる. 最初に選ばれた参加者は, すべての可能な結果から, 自身が最も選好する部分集合を選択する. さらに, 次に選ばれた参加者が, 最初の参加者が指定した部分集合から, 自身が最も選好する部分集合を選択する. 以下同様に, 順に残された可能性の中から, 選ばれた参加者が最も選好する部分集合を指定していく. 任意の

SD メカニズムは戦略的操作不可能でパレート効率的であることが知られている [1]. SDRQ は SD メカニズムの一つであるため、SDRQ は戦略的操作不可能かつパレート効率的となる。また、学生 s が、 $c \succ_s \mu(s)$ であるにも関わらず、学校 c に割り当てられなかった場合を考える。この場合、ML で s より下位の学生は、 c に割り当てられることはない。すなわち、 c に割り当てられている学生はすべて ML で s より上位である。従って SDRQ は ML-フェアである。□

4.2 地域下限制約の下でのマルチステージ DA

本論文で提案する二番目のメカニズムは、地域下限制約の下でのマルチステージ DA (Multi-Stage Deferred Acceptance with regional quotas, MSDARQ) と呼ばれる。MSDARQ は、個別の下限を扱う MSDA [5] の拡張である。

SDRQ の問題点として、各学校の個別の優先順位を完全に無視していることがある。この結果、多くの学生が (弱い意味で) 妥当な不満を持つことが予想される。MSDARQ は次の点で SDRQ を修正している。学生を一人ずつ割り当てるのではなく、複数の学生を同時に、通常の DA メカニズムを用いて割り当てる。通常の DA メカニズムでは、学生は拒否されていない学校のうち、最も選好する学校に申込を行う。学校は申込のあった学生と仮マッチしている学生のうち、学校の優先順位で上位の学生を上限まで仮マッチし、残りの学生は拒否する。以上を全ての学生が仮マッチされるまで繰り返し、メカニズムを終了する。このメカニズム終了時における仮マッチをマッチングとして出力する。MSDARQ は ML を用いて、下限制約が必ず満足されるように、学生の部分集合を保持する。

より正確には、MSDARQ の最初のステージでは、 E^1 なる学生の部分集合を保持して、その他の学生、すなわち $E^0 \setminus E^1$ ($E^0 = S$) に含まれる学生を、通常の DA を用いて割り当てる。保持する学生の数 $|E^1| = e^1$ は、 p_C と等しくし、 $E^1 = \{s_{n-e^1+1}, s_{n-e^1+2}, \dots, s_n\}$ 、すなわち、 E^1 はマスターリストで最下位から e^1 人までの学生の集合である。 $E^0 \setminus E^1$ に関して DA を実施したのち、現在のマッチング μ^1 を確定して、 μ^1 を木に適用して新しい制約を得る。その後、残りのステージを同様な方法で適用する。より詳細には、MSDARQ は $E^0 = S$ 、 $e^1 = p_C$ とし、すべての $r \in R$ に関して、 $p_r^1 = p_r$ および $q_r^1 = q_r$ 、 $k = 1$ として以下の手続きを開始する。

Stage $k \geq 1$

Step 1: $E^k = \{s_{n-e^k+1}, s_{n-e^k+2}, \dots, s_n\}$ とする。すなわち、 E^k は ML で最下位から e^k 人目までの学生の集合である。

- (a) $E^{k-1} \setminus E^k \neq \emptyset$ の場合、通常の DA メカニズムを $E^{k-1} \setminus E^k$ に含まれる学生に対して適用する (DA メカニズムの適用時には、下限制約は無視され、個別の上限制約のみが考慮される)。
- (b) $E^{k-1} \setminus E^k = \emptyset$ の場合、 E^k に関して SDRQ メカニズムを適用する。

Step 2: Step 1 で得た部分マッチングを μ^k を現在の木

に対して適用し、更新された制約 p_r^{k+1}, q_r^{k+1} 、および a_r^{k+1} を定義 9 に従って得る。さらに、 $e^{k+1} = p_C^{k+1}$ とする。すべての学生がマッチされていれば終了、そうでなければ $k \leftarrow k + 1$ として Step 1 に戻る。

MSDARQ の最後のステージは、通常は Step 1 の (b) の処理、すなわち、保持すべき学生数が、ルートノード C の下限制約と等しくなった場合で与えられる。他の可能性として、 C の下限制約が 0 であり、 E^k が $\emptyset$ となる場合、すなわちすべての下限制約が満足されている場合がある。この場合は最後のステージで通常の DA メカニズムが適用される。

例 2. 例 1 と同じ問題設定を考える。MSDARQ の Stage 1 では、ルートノードの下限制約は 6 であるので、 $E^1 = \{s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8\}$ として、 s_1 と s_2 に関して通常の DA メカニズムを適用する。Stage 1 では s_1 が c_2 に、 s_2 が c_1 に割り当てられる。

Stage 2 では 6 人の学生が残っており、 $p_C^2 = 4$ である。よって、 $E^2 = \{s_5, s_6, s_7, s_8\}$ として、 s_3 と s_4 に関して通常の DA メカニズムを適用する。Stage 2 では s_3 と s_4 は c_2 に割り当てられる。

Stage 3 では 4 人の学生が残っており、 $p_C^3 = 4$ である。ここで、 E^3 と E^2 は等しくなり、残りの学生に対して SDRQ を適用する。SDRQ の任意の Stage で、残りの学生数はルートノードの下限制約の値に等しいため、Case 2 のみが生じる。よって、残りの学生は、飽和していない学校にのみ割り当て可能であり、学生 s_5, s_6, s_7, s_8 は、 c_3 もしくは c_4 のみを選ぶ。最終的に得られるマッチングは以下の通りである：

$$\begin{array}{ll} c_1 : & s_2 \\ c_2 : & s_1 \quad s_3 \quad s_4 \\ c_3 : & s_8 \\ c_4 : & s_5 \quad s_6 \quad s_7 \end{array}$$

定理 9. $p_C \leq n \leq q_C$ が成立する場合、MSDARQ は常に実行可能なマッチングを得る。

証明. 以下、証明の概略のみを示す。Step 1 で (a) の条件が成立している時点では、定理 5 より、MSDARQ の各ステージでの木は実行可能である。また、Step 1 で (b) の条件が成立した時点で、SDRQ が適用されるため、定理 7 より、得られるマッチングは実行可能となる。□

定理 10. MSDARQ メカニズムは戦略的操作不可能で無駄がなく、ML-フェアである。

証明. メカニズムが戦略的操作不可能であることは、各ステージで用いられる DA メカニズムおよび SDRQ メカニズムが戦略的操作不可能であり、各学生 s は、自分の参加するステージに影響を与えることが不可能であることから導かれる。

メカニズムに無駄がない理由は以下の通りである。ある学生が、満員でない学校に割り当てられないのは、最後のステージで SDRQ メカニズムが適用される場合のみである。この場合、学生が割り当てられる学校はいずれも、少なくとも一つの、その学校を含む地域で下限制約がちょうど満たされてい

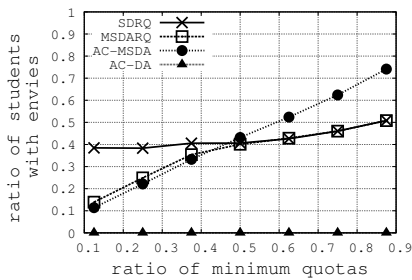


図 1 妥当な不満を持つ学生の比率

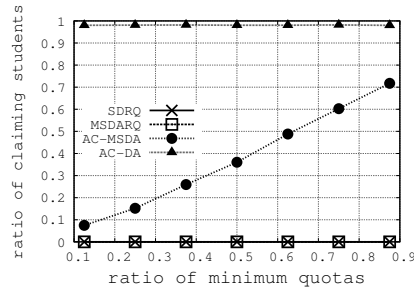


図 2 空きシートを要求する学生の比率

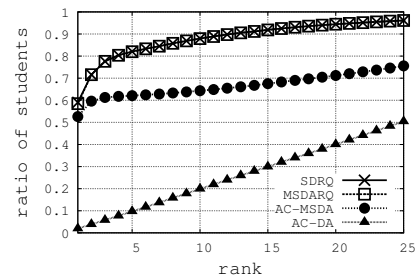


図 3 学生の満足度に関する累積分布関数

る．よって，学生は空きシートを要求することはできない．

ML-フェアに関して，Stage k で割り当てられた学生 s が，自身が割り当てられた学校よりも他の学校 c を選好すると仮定する．明らかに Stage k 以前に c に割り当てられた学生は ML で s より上位にある．Stage k 以前に c が満員であれば， c に割り当てられている学生はいずれも，ML で s より上位にある．また，Stage k で c が満員でなく， s が c に割り当てられない場合，Stage k で DA メカニズムが用いられている際には，Stage k で c に割り当てられた学生は， c の優先順位で s より上位である．また，Stage k で SDRQ メカニズムが用いられている際には，Stage k で c に割り当てられた学生は，ML で s より上位にある．よって，いずれの場合でも， c に割り当てられている学生は，ML もしくは c の優先順位で s より上位となり，得られるマッチングは ML-フェアである． $\square$

5 評価

本章では，新しく開発した SDRQ および MSDARQ の実験的評価を行う．学生数 $n = 512$ ，学校数 $m = 64$ とし，各学校の個別の上限制約 $q_{\{c\}} = 40$ ，個別の下限制約 $p_{\{c\}} = 0$ とする．地域の階層構造は二分木で与える．すなわち，木の深さは 6 となる^{*1}．また，地域の下限制約は，各地域の要素的下限制約の値が概ね等しくなるように設定する．また，要素的下限制約の合計値，すなわち $\sum_{r \in R} a_r$ の値は，64 から 448 の範囲で変化させる．学生の選好順序は，まず各学生に関して，各学校の評価値を生成し，その評価値に基づく基数的効用を順序的効用に変換したものをを用いる．学生の各学校の評価値は以下のように決定する．まず，すべての学生で共通のベクトル u_c を $[0, 1]^m$ から一様分布により生成する．次に，個別のベクトル u_s を，同様に $[0, 1]^m$ から一様分布により生成する．さらに，これらを用いて各学校 s の評価値を，パラメータ $\alpha \in [0, 1]$ を用いて $\alpha u_c + (1 - \alpha) u_s$ で与える．パラメータ α の値が大きいほど，学生の選好の相関が強くなる．以下の実験では α は 0.6 としている．各学校の優先順位 $\succ_c$ は一様分布により生成し，ML は $s_1 \succ_{ML} \dots \succ_{ML} s_n$ とする．各パラ

メータ設定に関して 100 個の問題のインスタンスを生成する．

提案メカニズムと，人為的キャップメカニズム，具体的には AC-DA および AC-MSDA と呼ばれるメカニズムと比較する．AC-DA では，各学校の個別の上限制約を 8 として，通常の DA メカニズムを適用する．AC-MSDA メカニズムでは，各学校の個別の下限制約を $\sum_{r \in R} a_r / m$ ，すなわち，要素的下限制約の値の総和の平均値として，文献 [5] に示されている個別の下限を扱う MSDA メカニズムを適用する．AC-DA および AC-MSDA はすべての地域下限制約を満足するが，提案メカニズムと比較すると柔軟性に乏しい．例えば，ある一つの学校に人気が集まった場合，本来は下限制約に違反することなく，その学校に上限の 40 人の学生が割当て可能であるにも関わらず，AC-DA メカニズムでは 8 人の学生のみが割当て可能となる．AC-MSDA メカニズムは，AC-DA メカニズムよりは割当ての自由度が大きい，個別の下限制約に固定的に割り当てているため，地域内での割当ての柔軟性を失っている．

図 1 に，(弱い意味で) 妥当な不満を持つ学生の比率を示す．ここで，x 軸は $\sum_{r \in R} a_r / n$ ，すなわち，学生数に対する要素的下限制約の値の合計の比を示しており，この値が大きいほど下限制約の総量が大きくなる．AC-DA はフェアであり，不満を持つ学生は存在しない．MSDARQ は，常に SDRQ および AC-MSDA よりも不満を持つ学生数は少ない．下限制約の総量が増えるほど，学生は不満を持ちやすくなる．

図 2 は，空きシートを要求する学生の比率を示している．x 軸は図 1 と同様である．MSDARQ および SDRQ は無駄がないため，空きシートを要求する学生は存在しない．図が示すように，AC-DA は非常に無駄が多い．AC-MSDA は AC-DA よりも無駄が少ないが，下限制約の総量が増えた場合に，空きシートを要求する学生の比率は 70% にも達する．

また，図 3 では学生の満足度を評価する．すなわち，各メカニズムにおいて学生が割り当てられた学校に関する，学生の希望順位の累積頻度分布関数 (cumulative distribution functions, CDFs) を示す．例えば，MSDARQ で x 軸の値が 5 であるときに比率が 0.8 であることは，80% の学生が，第 1 希望から第 5 希望までのいずれかの学校に割り当てられていることを示している．ここでは，グラフの値が急激に上昇している方が学生の満足度が高いと考えられる．MSDARQ と SDRQ は明らかに人為的キャップメカニズムより優れている．例えば，

^{*1} 他の階層構造，例えば，多くの小さい地域に分割されるもの，少数の大きな地域が存在するもの等においても実験を行い，定性的な結果は二分木の場合と非常に近いことを確認している．

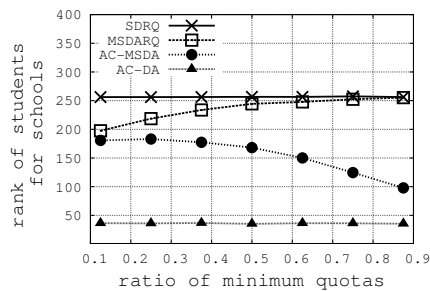


図 4 学校の優先順位における学生の評価

70% 近くの学生は、第 1 もしくは第 2 希望の学校に割り当てられている。人為的に上限 / 下限制約の値を変更するメカニズムでは、割当てにおける柔軟性が失われており、学生の満足度が著しく下がってしまっている。

次に、メカニズムの選択が学校に与える影響を解析する。各学校は学生に関する優先順位のみを持つため、二つの学生の集合に関して、どちらがより望ましいかを定義することは困難である。ここでは、簡単のため、割り当てられている学生の、学校の優先順位における平均順位を用いる。この評価基準は各学校に割り当てられている学生数を無視している。提案メカニズムは学生の希望を考慮して、より柔軟に学生を割り当てるため、各学校に割り当てられる学生数に差が出やすい。このため、AC-DA や AC-MSDA より、MSDARQ および SDRQ の方が性能が悪くなることが予想される。図 4 に x 軸は図 1 および 2 と同様とした、この評価基準による結果を示す。予想通り、平均順位の高さは、AC-DA, AC-MSDA, MSDARQ の順となっている。一方、SDRQ と MSDARQ を比較すると、学校の優先順位を考慮する MSDARQ の方が平均順位は高い。この評価では ML と各学校の優先順位は無関係であると仮定しているが、これらが相関している場合、ML を用いるメカニズムと AC-DA との差は小さくなると予想される。

最後に、MSDARQ と SDRQ の間のトレードオフについて考察する。学生の満足度においては、両方のメカニズムは同等である。しかしながら、SDRQ は学校の優先順位を完全に無視しているため、妥当な不満を持つ学生の比率が高く、特に要素的下限制約の総数が小さい場合に、MSDARQ との差が大きい。よって、不満を持つ学生数が少ないことが望まれるのであれば、MSDARQ を用いるべきであると考えられる。

6 結論

本論文では地域上限 / 下限制約が存在する場合に実行可能なマッチングが存在するか否かの判定問題の計算量を解析し、さらに、地域制約が階層的な場合に適用可能なメカニズムを開発した。これらのメカニズムは、個別の下限制約に対応可能な SD および MSDA メカニズムを拡張したものであり、戦略的操作不可能かつ無駄がないという望ましい性質を備えている。また、すべての学校で共通の学生のランキング (マスターリス

ト) の下でフェアである。実験の評価により、これらのメカニズムの人為的キャップアプローチに対する優位性を示した。

今後の研究課題として、表 1 で “open” としている、階層的な地域上限 / 下限制約が混在する問題設定で適用可能なメカニズムを開発すること、および ML が利用不可能な場合に適用可能な、公平性を保証するメカニズムを開発することが挙げられる。また、MSDARQ に関する、より強い理論的性質を解明すること、例えば、戦略的操作不可能かつ無駄がないメカニズム中で、MSDARQ より厳密に優れているメカニズムが存在しないことを示すこと等が挙げられる。

参考文献

- [1] A. Abdulkadiroglu and T. Sonmez. Random serial dictatorship and the core from random endowments in house allocation problems. *Econometrica*, Vol. 66, No. 3, pp. 689–702, 1998.
- [2] A. Abizada and S. Chen. The college admission problem with entrance criterion. 2011. mimeo.
- [3] P. Biro, T. Fleiner, R. W. Irving, and D. F. Manlove. The college admissions problem with lower and common quotas. *Theoretical Computer Science*, Vol. 411, No. 34–36, pp. 3136–3153, 2010.
- [4] L. Ehlers, I. E. Hafalir, M. B. Yenmez, and M. A. Yildirim. School choice with controlled choice constraints: Hard bounds versus soft bounds. 2012. mimeo.
- [5] D. Fragiadakis, A. Iwasaki, P. Troyan, S. Ueda, and M. Yokoo. Strategyproof matching with minimum quotas. 2012. mimeo (An extended abstract version appeared in AAMAS, pages 1327–1328, 2012).
- [6] R. W. Irving, D. F. Manlove, and S. Scott. The stable marriage problem with master preference lists. *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 156, pp. 2959–2977, 2008.
- [7] Y. Kamada and F. Kojima. Stability and strategy-proofness for matching with constraints: A problem in the Japanese medical match and its solution. *American Economic Review*, Vol. 102, No. 3, pp. 366–370, 2012.
- [8] N. Perach, J. Polak, and U. G. Rothblum. A stable matching model with an entrance criterion applied to the assignment of students to dormitories at the technion. *International Journal of Game Theory*, Vol. 36, pp. 519–535, 2007.
- [9] N. Perach and U. G. Rothblum. Incentive compatibility for the stable matching model with an entrance criterion. *International Journal of Game Theory*, Vol. 39, pp. 657–667, 2010.
- [10] A. E. Roth and M. A. O. Sotomayor. *Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis (Econometric Society Monographs)*. Cambridge University Press., 1990.