

## 内部 3 連結グラフの外 6 角格子凸描画

## Outer Hexagonal Convex Grid Drawings of Internally Triconnected Plane Graphs

三浦 一之\*

Kazuyuki Miura

## 概要

平面グラフ  $G$  の凸描画においては、全ての辺は交差しない直線分で描かれ、全ての面は凸多角形で描かれる。 $G$  の凸描画で、各点が整数座標を持ち、外面が  $k$  角形であるものを外  $k$  角格子凸描画という。 $G$  が凸描画を持つための必要十分条件は、 $G$  が内部 3 連結であることである。 $n$  を  $G$  の点数としよう。 $G$  が 3 連結であるか、あるいは  $G$  の 3 連結成分分解木  $T(G)$  の葉の数が 3 枚以下ならば、 $G$  は大きさ  $n \times n$  の整数格子内に外 3 角格子凸描画できる。また、 $T(G)$  の葉の数がちょうど 4 枚ならば大きさ  $2n \times 2n$  の整数格子内に外 4 角格子凸描画できる。更に、 $T(G)$  の葉の数がちょうど 5 枚ならば大きさ  $6n \times n^2$  の整数格子内に外 5 角格子凸描画できる。本論文では、 $T(G)$  の葉が 6 枚のとき、内部 3 連結グラフ  $G$  は  $6n \times n^2$  の大きさの整数格子内に外 6 角格子凸描画できることを証明すると共に、そのような描画を求める線形時間アルゴリズムを与える。

## 1 序論

近年、様々な分野で与えられたグラフを「構造を理解しやすく」かつ「きれいに」描画する手法が求められている [8]。平面グラフ  $G$  の描画で、 $G$  の各辺が交差の無い直線分として描かれたものを直線描画という。 $G$  の直線描画で、 $G$  の各点が整数座標を持つものを格子直線描画という。本論文では、格子直線描画に更なる制約を加えた格子凸描画を扱う。平面グラフ  $G$  の直線描画で、全ての面閉路が凸多角形として描画されるものを凸描画という。 $G$  の凸描画で、各点が整数座標をもつものを  $G$  の格子凸描画という。格子凸描画で外面が  $k$  角形であるものを外  $k$  角格子凸描画という。なお、本論文ではグラフ  $G$  の点数を  $n$  で表す。また、大きさ  $W \times H$  の整数格子は  $W+1$  本の垂直線分と  $H+1$  本の水平線分およびそれらの交点からなり、その外周は矩形であるとする。 $W$  は整数格子の幅、 $H$  は高さという。整数格子の幅を  $W$ 、高さを  $H$  とする。格子サイズは  $W \times H$  と表す。グラフ  $G$  が 3 連結であるか、あるいは  $G$  の 3 連結成分分解木  $T(G)$  の葉の数が 3 枚以下ならば、 $G$  は大きさ  $n \times n$  の整数格子内に外 3 角格子凸描画できることが知られている [1]。また、 $T(G)$  に葉がちょうど 4 枚あるときには、大きさ  $2n \times 2n$  の整数格子内に外 4 角格子凸描画できることが知られている [3]。さらに  $T(G)$  に葉がちょうど 5 枚あるときには、大きさ  $6n \times n^2$  の整数格子内に外 5 角格子凸描画できることが知られている [5]。

本論文では、内部 3 連結グラフ  $G$  の  $T(G)$  に葉がちょうど 6 枚あるとき、 $G$  は大きさ  $6n \times n^2$  の整数格子内に外 6 角格子凸描画出来ることを証明すると共に、そのような描画を求める線形時間アルゴリズムを与える。本アルゴリズムの概略は以下の通りである。

## (Step 1) 分解木の作成

与えられた内部 3 連結グラフの 3 連結成分分解木  $T(G)$  を作成する。

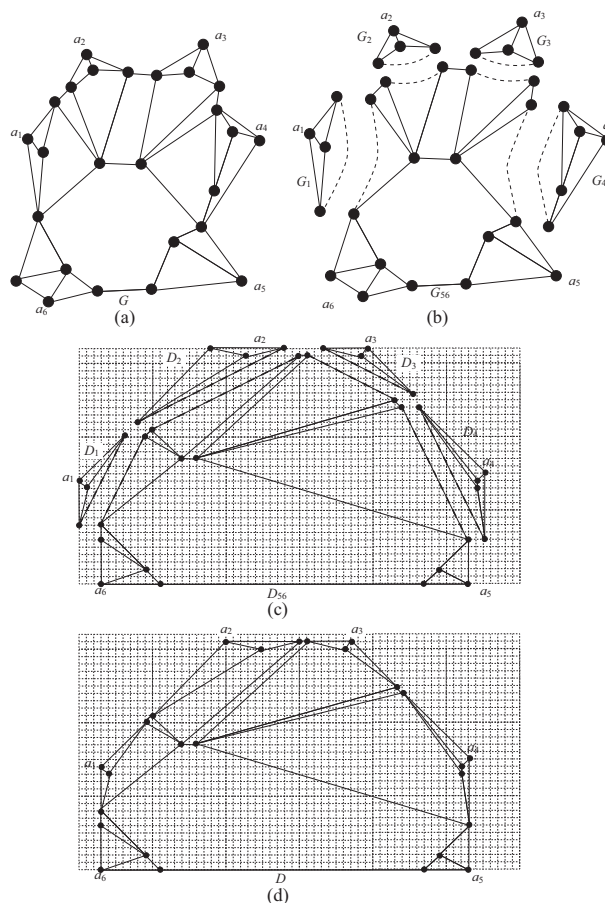


図 1: (a) 平面グラフ  $G$ , (b) グラフ  $G_1, G_2, G_3, G_4$  および  $G_{56}$ , (c) 描画  $D_1, D_2, D_3, D_4$  および  $D_{56}$ , (d)  $G$  の描画  $D$ 。

\*福島大学 理工学群 共生システム理工学類

## (Step 2) 分解木の葉を 4 つ分離

$G$  を, 3 連結成分分解木の 1 枚の葉に対応する 4 つのグラフ  $G_1, G_2, G_3$  および  $G_4$  と残りのグラフ  $G_{56}$  に分割する (図 1(b) 参照) .

(Step 3)  $G_1$  と  $G_4$  の描画

[1, 2] の手法を一部改良したアルゴリズムを用いて, Step 2 で分割したグラフ  $G_1$  と  $G_4$  を, 外周の 3 本の辺の傾きがそれぞれ  $+\infty, |1|, |2|$  であるように外 3 角格子凸描画する (図 1(c) 参照) .

(Step 4)  $G_2$  と  $G_3$  の描画

[1, 2] の手法を一部改良したアルゴリズムを用いて, Step 2 で分割したグラフ  $G_2$  と  $G_3$  を, 外周の 3 本の辺の傾きがそれぞれ  $0, |1|, |1/2|$  であるように外 3 角格子凸描画する (図 1(c) 参照) .

(Step 5)  $G_{56}$  の描画

[4] の手法を一部改良したアルゴリズムを用いて, グラフ  $G_{56}$  を, 外周の 7 本の辺の傾きがそれぞれ  $0, +\infty, +2, +1, +1/2, 0, -1/2, -1, -2, -\infty$  であるように外 10 角格子凸描画する (図 1(c) 参照) .

## (Step 6) グラフの組み合わせ

各グラフ  $G_1, G_2, G_3$  および  $G_4$  の描画  $D_1, D_2, D_3$  および  $D_4$  とグラフ  $G_{56}$  の描画  $D_{56}$  を組み合わせ, 全体のグラフ  $G$  の描画を形成する (図 1(d) 参照) .

## 2 準備

本節では, いくつかの定義と既知の補題を与える. グラフ  $G$  は点の集合  $V$  と辺の集合  $E$  からなり,  $G = (V, E)$  で表す. 辺交差なしに描画できるグラフを平面グラフという. 平面グラフ  $G$  は平面を連結する領域に分割する. その各領域を面という. 無限面を外面とし, 外面以外の面は内面と定義する. これらの面の境界は面閉路と呼ばれる.  $G$  の外面閉路を  $F_o(G)$  によって表す.  $F_o(G)$  の点は外点とし,  $F_o(G)$  上にない点は内点とする. 平面グラフ  $G$  の凸描画において, 全ての面閉路は凸多角形として描かれる.  $F_o(G)$  の凸多角形描画を外多角形という. 本論文では, グラフの点との混合を避けるため, 多角形の点を頂点と呼ぶ.

2 連結平面グラフ  $G$  において, 点の対  $\{u, v\}$  を  $G$  から取り除いた結果, グラフ  $G$  が非連結となるならば  $\{u, v\}$  を分離対という. グラフ  $G$  が分離対を持たないならば, 2 連結グラフ  $G$  は 3 連結であるという.  $G$  の任意の分離対  $\{u, v\}$  に対して,  $u, v$  が共に外点であり,  $G - \{u, v\}$  の各々の連結成分が外点を含むならば, 2 連結平面グラフ  $G$  は内部 3 連結であるという.  $G = (V, E)$  を 2 連結グラフとし,  $u, v$  を  $G$  の分離対とする. このとき,  $G$  は以下の 2 つの条件 (a), (b) を満たすような 2 つのグラフ  $G'_1 = (V_1, E'_1)$  と  $G'_2 = (V_2, E'_2)$  を持つ.

(a)  $V = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \{u, v\}$  ;

(b)  $E = E'_1 \cup E'_2, E'_1 \cap E'_2 = \emptyset, |E'_1| \geq 2, |E'_2| \geq 2$  .

$G$  の分離対  $\{u, v\}$  について,  $G_1 = (V_1, E'_1 + (u, v))$  と  $G_2 = (V_2, E'_2 + (u, v))$  を,  $\{u, v\}$  に関する  $G$  の分離グラフという.  $G_1$  と  $G_2$  に加えられる新しい辺  $(u, v)$  は, 仮想辺と呼ぶ.  $G$  が多重辺を持っていないとしても,  $G_1$  と  $G_2$  は多重辺を持つかもしれない. グラフ  $G$  を 2 つの分離グラフ  $G_1$  と  $G_2$  に分けることを, 分離という. 2 つの分離グラフ  $G_1$  と  $G_2$  を再び組み合わせ  $G$  を構成することを, 結合という. つまり, 結合は分離の逆である. 分離グラフをさらに分離する, という操作をそれ以上分離できなくなるまで繰り返す. このようにして出来るグラフを  $G$  の分離成分という.  $G$  の分離成分は, 次の 3 つのいずれかである (1) 3 連結グラフ; (2) 3 本の多重辺 (2 点が 3 本の辺で繋がれているもの); (3) 三角形 (長さ 3 の面閉路).  $G$  の分離成分のうち, 3 本の多重辺を可能な限り組み合わせ一組の多重辺を構成し, 三角形を可能な限り組み合わせ閉路を構成することにより得られるものを  $G$  の 3 連結成分という.  $G$  の 3 連結成分は, 次の 3 つのいずれかである: (a) 3 連結グラフ; (b) 多重辺; (c) 閉路. 各点が  $G$  の各 3 連結成分  $H_i$  に対応し,  $H_i$  と  $H_j$  が同じ分離対に関する 3 連

結成分であるときかつそのときのみ辺  $(H_i, H_j) (i \neq j)$  を持つ木  $T(G)$  を考える.  $T(G)$  を 3 連結成分分解木または単に  $G$  の分解木と呼ぶ.  $l(G)$  によって,  $T(G)$  の葉の数を示す.  $G$  が 3 連結ならば,  $T(G)$  は一つの独立した点となり,  $l(G)=1$  となる. 以下の補題が知られている.

補題 2.1 [6] 平面グラフ  $G$  が凸描画  $D$  を持つならば,  $D$  の外多角形の頂点の数は  $\max\{3, l(G)\}$  以上である, 更に, 外多角形がちょうど  $\max\{3, l(G)\}$  個の頂点を持つ  $G$  の凸描画が存在する.

## 3 主定理

本節ではアルゴリズムに関するいくつかの補題および主定理を与える.

以下の補題が成り立つ.

補題 3.1  $G$  を分解木の葉の数が 2 以下である内部 3 連結グラフとする. このとき  $G$  は大きさ  $2n \times 4n$  の格子内に, 3 本の辺の傾きがそれぞれ  $+\infty, 1, 2$  であるように線形時間で外 3 角格子凸描画できる.

補題 3.2  $G$  を分解木の葉の数が 3 以下である内部 3 連結グラフとする. このとき  $G$  は大きさ  $2n \times n^2$  の格子内に, 10 本の辺の傾きがそれぞれ  $0, +\infty, +2, +1, +1/2, 0, -1/2, -1, -2, -\infty$  であるように線形時間で外 10 角格子凸描画できる.

補題 3.1 および 3.2 を用いると次の主定理が成り立つ.

定理 1  $G$  を分解木の葉の数がちょうど 6 である内部 3 連結グラフとする. このとき  $G$  は大きさ  $6n \times n^2$  の格子内に線形時間で外 6 角格子凸描画できる.

## 謝辞

本研究は科研費 23700008 の助成を受けたものである.

## 参考文献

- [1] M.Chrobak and G.Kant, Convex grid drawing of 3-connected planar graphs, International Journal of Computational Geometry and Application, 7, pp.211-223,1997.
- [2] H.de Freysseix, J.pach and R.pollack, How to draw a planar graph on a grid, Combinatorica, 10, pp. 41-51, 1990.
- [3] 橋本友也, 三浦一之, 西関隆夫 内部 3 連結グラフの格子凸描画, Technical Report of IEICE, COMP 2011-16, Vol.111, No 113, pp.1-8, (2011).
- [4] J.E.Hopcroft and R.E.Tarjan, Drawing a graph into triconnected components, SIAM J. Comput. 2, 3, pp. 135-138,1973.
- [5] Kazuyuki Miura, Convex Grid Drawings of Plane Graphs with Pentagonal Contours, IEICE Transactions on Information and Systems, submitted.
- [6] K.Miura, M.Azuma and T.Nishizeki, Convex drawings of plane graphs of minimum outer apices, Proc. of GD 2005, LNCS 3843, pp. 297-308, 2005, also to appear in International Journal of Foundations of Computer Science.
- [7] K.Miura, A.Kamada and T.Nishizeki, Convex grid drawings of plane graphs of rectangular contours, J.Graph Algorithms and Applications,12,2,pp.197-224,2008.
- [8] T.Nishizeki and M.S.Rahman, Planer Graph Drawing, World Scientific, Singapore, 2004.