

P/T ペトリネットにおける特解導出のためのアルゴリズムに関する一考察

A study of an Algorithm for Finding Particular Solutions in P/T Petri Nets

恐神正博[†]
Masahiro Osogami

山西輝也[†]
Teruya Yamanishi

魚崎勝司[†]
Katsuji Uosaki

1. まえがき

離散事象システムの有用なモデルの 1 つである P/T ペトリネットにおいて、その挙動を考える際に、最も基本的な問題のうち可到達判定問題がある。これは、初期マーキング M_0 から最終マーキング M_d へトークンが遷移可能かどうかを判定するものであるが、この問題の解法には被覆木、状態方程式、ペトリネットの構造と性質に着目する 3 つの手法があり、被覆木を用いた方法は一般に膨大な計算量を必要とする一方、状態方程式を用いる方法は、ペトリネットの性質を代数方程式の解の存在として考察できる利点があるため、その解法や、解の表現方法などについての研究が進められてきている [1]。

ここでは、状態方程式の解法としてよく知られた Fourier-Motzkin 法により初等的 T-インバリエントおよび特解が導出できることを述べるとともに、従来の Fourier-Motzkin 法では得られなかった解の導出について、Fourier-Motzkin 法のアルゴリズムを改良することでそれらの一部が得られることを示す。

2. 準備

ペトリネットは、 $N = (P, T, F, W)$ で表され、
 $P = \{p_1, \dots, p_m\}$; プレースの有限集合、
 $T = \{t_1, \dots, t_n\}$; トランジションの有限集合、
 $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$; アークの集合、
 $W : F \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$; アークの重み付け関数である。また、 (N, M_0) をマーキング付きネットと呼び、 $M_0 \in Z_+^{m \times 1}$ は初期マーキングである。

n 個のトランジションと m 個のプレースを持ったペトリネットに対して、接続行列 $A = [a_{ij}]$ は $m \times n$ の整数行列であり、各成分は (1) 式で与えられる。

$$a_{ij} = a_{ij}^+ - a_{ij}^- \quad (1)$$

ここで、 $a_{ij}^+ = \omega(i, j)$ はトランジション i からその出力プレース j に向かうアークの重みであり、 $a_{ij}^- = \omega(j, i)$ はトランジション i の入力プレース j からトランジション i に向かうアークの重みである。

目標とするマーキング (最終マーキング) M_d が、発火系列 $\{t_1, t_2, \dots, t_d\}$ を通して初期マーキング M_0 から可達であると仮定した場合、 $i = 1, 2, \dots, d$ に対する状態方程式を求め、和をとると、

$$M_d = M_0 + A \sum_{k=1}^d t_k \quad (2)$$

を得る。また式 (2) は次のように書きなおすことができる。

$$Ax = b \quad (3)$$

式 (3) において、 $A \in Z^{m \times n}$ 、 $b = M_d - M_0 \in Z^{m \times n}$ および $x = \sum_{k=1}^d t_k \in Z_+^{n \times 1}$ である。

3. Fourier-Motzkin 法

Fourier-Motzkin 法は初等的ベクトル解のすべて ($Ax = 0^{m \times 1}$ の非負整数解) を含むようなベクトル解の集合を算出する方法であり [2]、そのアルゴリズムは以下のとおりである。

< Fourier-Motzkin (FM) 法のアルゴリズム >

入力: 接続行列 $A \in Z^{m \times n}$

出力: 初等的ベクトル解のすべてを含むベクトル解の集合

初期化: 接続行列 $A \in Z^{m \times n}$ の下に単位行列 $E^{n \times n}$

を置いた $B = [A \ E]^T \in Z^{(m+n) \times n}$ とする。

$i = 1$ から m まで以下の a), b) の操作を

繰り返す。

a) 行列 $B \in Z^{(m+n) \times n}$ に対し、 A の第 i 行の 0 でない要素を 0 にするような B の 2 つの列の正係数一次結合 (ただし係数は最小のものを選ぶ) をすべて B の列に加え、これを新しく B とする。

b) 第 i 行に 0 でない要素をもつすべての列を B から削除し、これを新しく B とする。

一方、この Fourier-Motzkin 法は通常、 $Ax = 0$ の解 x を求めるため、状態方程式、 $Ax = b$ を考えた場合の $b = 0$ すなわち、T-インバリエントを求めるための手法であるが、接続行列 A を拡大し、拡大接続行列 $\tilde{A} = [A \ -b] \in Z^{m \times (n+1)}$ とし、 $\tilde{A}\tilde{x} = 0$ の解 \tilde{x} を通常と全く同じアルゴリズムにより求めることで、 $Ax = b$ における解、すなわち発火回数ベクトルを求めることができる [3]。そこで、以後 $A = \tilde{A}$ 、 $x = \tilde{x}$ とし、通常の Fourier-Motzkin 法を用いて発火回数ベクトル x を求めていく。

(例題): 先に示したアルゴリズムに基づき次の例題における解の導出を行う。

[†]福井工業大学 経営情報学科

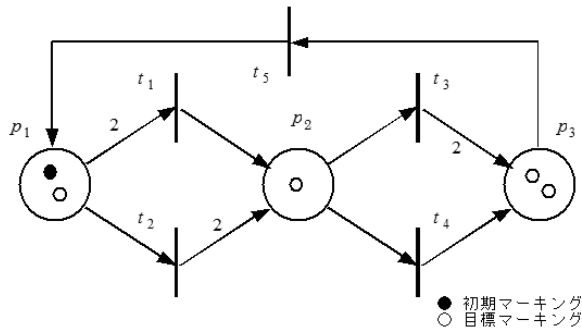


図 1 . ペトリネットの例

ここで, $M_0 = (1 \ 0 \ 0)^T, M_d = (1 \ 1 \ 2)^T$ から,

$$b = M_d - M_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in Z^{3 \times 1} \quad (4)$$

また,

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \in Z^{3 \times 6} \quad (5)$$

から, $\tilde{A}\tilde{x} = 0$ の解 x を, 先に示した Fourier-Motzkin 法のアルゴリズムにより求めると,

$$u_1 = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 2)^T, \quad v_1 = (0 \ 3 \ 0 \ 5 \ 3)^T,$$

$$u_2 = (1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 0)^T.$$

ただし,

$$u_i \in U := \{u_i \in Z_+^{n \times 1}; Ax = b \text{ の初等的 T-インバリエント},$$

$$v_j \in V := \{v_j \in Z_+^{n \times 1}; Ax = b \text{ の特解},$$

となる.

しかし, ある発火回数ベクトル $x = (0 \ 2 \ 1 \ 2 \ 2)^T$ (この際 $\tilde{x} = (0 \ 2 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1)^T$) を考えたとき, 確かに $\tilde{A}\tilde{x} = 0$ が成り立ち, この $x = (0 \ 2 \ 1 \ 2 \ 2)^T$ は解であることが言え, なおかつ, u_i, v_j の組み合わせでも表現できないため, 特解であることがわかる. すなわち, 従来の Fourier-Motzkin 法ではすべての特解が求め切れていないことになる.

4. アルゴリズムの考察

従来の Fourier-Motzkin 法のアルゴリズムではすべての特解が求め切れていないことが §3 の例題で示したが, これは, §3 で示したアルゴリズムにおける a) の部分において, 第 i 行目の要素をすべて 0 にするように 2 つ列の正係数一次結合を作っている部分が, 必ずしも正負それぞれの要素を持つ 2 つの列によってのみ, 第 i 行目の要素を 0 にするわけではないことによると考えられる.

つまり, 第 i 行目の要素を 0 にするには, 2 つ以上の列の組み合わせを用いても行うことができるということである. 従来の Fourier-Motzkin 法では, それらの組み合わせにおける列操作の情報が抜けてしまうため, すべての特解を得ることができないものと考えられる.

そこで, Fourier-Motzkin 法のアルゴリズムにおいてこの部分に改良を加える.

<改良 Fourier-Motzkin(MFM) 法のアルゴリズム>

§3 におけるアルゴリズムの a) の部分を以下のように変更する.

a) 行列 $B \in Z^{(m+n) \times n}$ に対し, A の第 i 行の 0 でない正と負の列の組み合わせに対し, それらの各要素の和により得られる列について, 得られた列が追加する以前のいずれかの列と同じではないか, もしくは, 得られた列の $m + 1$ 行から $m + n$ 行までの各要素のいずれかが追加する以前のすべての列の対応する各要素より小さい場合を除き, 得られた列を B の列に加え, これを新しく B とする. さらに, この操作をそれ以上新しい列が追加されなくなるまで繰り返す.

このアルゴリズムに基づき, §3 の例題について解を求めると, 改良前に求めた v_1 以外に, 新たに, $v_2 = (0 \ 2 \ 1 \ 2 \ 2)^T$ が求められる. これらの詳細については発表時に示す.

5. まとめ

従来の Fourier-Motzkin 法のアルゴリズムでは求め切れない解をアルゴリズムの改良を行うことで新たに求められることを示した. しかしながら, 改良したアルゴリズムでは, 解の候補数が従来よりも多くなってしまったため, 少し大きな問題を取り上げると収束しなくなるなどまだまだ改善の余地がある.

今後の課題としては, 解の候補数を絞り込むなどアルゴリズムのさらなる改善があげられる.

謝 辞

本研究の一部は科研費 (課題番号 24501221) および (課題番号 23560543) と大学連携リーグ連携研究推進事業, ならびに, 福井工業大学学内特別研究費 (クラスタ D) の助成を受けたものである. 記して謝意を表する.

参考文献

- [1] 村田, ペトリネットの解析と応用, 近代科学社, 1995.
- [2] J. Martinez and M. Silva, "A simple and fast algorithm to obtain all invariants of a generalized Petri net," Procs. of Second European Workshop on Application and Theory of Petri Nets, Informatik Fachberichte, No.52, pp.301-310, Springer Publishing Company, Berlin, 1982.
- [3] 松本, 茂呂, 恐神, "P/T ペトリネットの発火回数ベクトルを T インバリエントと特解で表すときの展開係数導出法," 信学技報, Vol.106, No.367, pp.19-24 (CST2006-21), 2006-11.