

区間グラフの向き付けにおける双方向支配

原田高浩*

荒木徹*

1 はじめに

グラフ理論において、支配集合問題は、巡回セールスマン問題、ハミルトン経路問題等と同じように広く研究されている問題の一つである。双方向支配問題は、支配集合問題の一種である。有向グラフ $D = (V, A)$ における頂点 u から v への有向辺を $(u, v) \in A(D)$ と表す。頂点 u に対して、 u の出近傍 $N^+[u]$ は u 自身と u から隣接する頂点の集合であり、 u は $N^+[u]$ を出支配するという。また頂点 v に対して、 v の入近傍 $N^-[v]$ は v 自身と v へ隣接する頂点の集合であり、 v は $N^-[v]$ を入支配するという。 D の頂点の部分集合 S によって、 D の全ての頂点が出支配され、入支配されているならば、 S を**双方向支配集合**という。最小双方向支配集合を求める問題を**双方向支配問題**という。この問題は Chartrand ら [2] によって提案された。

グラフの各辺を有向辺に置き換えることをグラフの向き付けといい、向き付けを行った有向グラフを向き付けグラフという。区間グラフ $G = (V, E)$ とは、 V の各頂点を数直線上の区間に対応付けることができ、対応する区間が共通部分をもつならば、頂点が隣接するグラフである。各頂点に対応けられた区間の集合を区間表現という。区間グラフでは、様々な問題に対する効率的なアルゴリズムが存在することが知られている。例えば、支配数、独立支配数、連結支配数、全支配数などを求めるアルゴリズムなどが知られている [1, 3]。区間グラフの区間表現において、すべての区間の端点が数直線上の異なる値になるような表現が存在することが知られている。そこで、本研究では n 個の頂点を持つ区間グラフとその区間表現に対して、各頂点と対応する区間の右端の値が小さいものから順に $\{1, 2, \dots, n\}$ とラベル付けする。そして、各辺 ij , $i < j$, を頂点 i から頂点 j へ有向辺が向かうように向き付けする。本研究における向き付け区間グラフの例

を図 1 に示す。

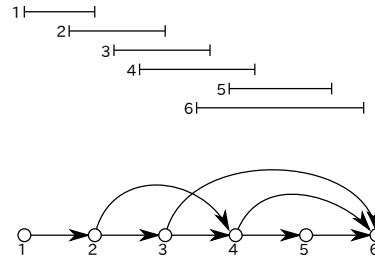


図.1 向き付け区間グラフの例

本報告では、上述のように向き付けを行った区間グラフに対して最小の双方向支配を求める多項式時間アルゴリズムを設計する。

2 向き付け区間グラフにおける最小双方向支配集合を求めるアルゴリズム

向き付けした区間グラフに対して、最小双方向支配集合を求めるアルゴリズムを設計する。向き付け区間グラフ G において、頂点 i へ隣接する最小の頂点を $LN(i)$ と表す。頂点 i が自身よりも小さい頂点と隣接しない場合 $LN(i) = i$ とする。区間グラフの重要な特徴として以下の性質が成り立つ。

補題 1. 区間グラフの任意の頂点 i は $\{LN(i), LN(i)+1, \dots, i-1\}$ のすべての頂点と隣接する。

2.1 アルゴリズム OIG-MTD

次の集合を定義する。 n 頂点の向け付け区間グラフ G と $1 \leq j \leq n$ に対して、集合 $T(i, j)$ を、 $\{1, 2, \dots, i\}$ を出支配し、かつ $\{1, 2, \dots, j\}$ を双方向支配する最小の頂点の部分集合であるとする。 $TD(n, n)$ が G の最小の双方向支配集合である。この集合に対して、次の定理が成り立つ。

定理 1. $TD(1, 1) = \{1\}$ 。また $2 \leq i \leq n$ かつ $1 \leq j \leq i$ に対して、

$$TD(i, j) = \min_k \{ \{k\} \cup TD(k-1, \min(LN(k)-1, j)) \}, \quad (1)$$

* 群馬大学大学院工学研究科情報工学専攻

ここで k は $k \leq i$ であり、かつ $\{k, k+1, \dots, i\}$ のすべての頂点を出支配するようなすべての頂点をわたる。

証明. まず、 $TD(i, j)$ が双方向支配集合であることを示す。 $i = 1$ のときは明らか。 $i \geq 2$ のとき、頂点 k を $\{k, k+1, \dots, i\}$ のすべての頂点を出支配する任意の頂点とする。補題 1 より k は $\{LN(k), LN(k)+1, \dots, k\}$ のすべての頂点を入支配する。 $LN(k)-1 < j$ とする。 $TD(k-1, LN(k)-1)$ は $k-1$ 以下のすべての頂点を出支配し、かつ $LN(k)-1$ 以下の頂点をすべて双方向支配する。よって $TD(i, j) = \{k\} \cup TD(k-1, LN(k)-1)$ は、 i 以下のすべての頂点を出支配し、 j 以下の頂点を双方向支配する。同様にして、 $LN(k)-1 > j$ のとき $TD(i, j) = \{k\} \cup TD(k-1, j)$ は、 $\{1, 2, \dots, i\}$ を出支配し、 $\{1, 2, \dots, j\}$ を双方向支配する集合である。よって $TD(i, j)$ は $\{1, 2, \dots, i\}$ を出支配し、 $\{1, 2, \dots, j\}$ を双方向支配する集合である。

次に $TD(i, j)$ の最小性を i についての帰納法で証明する。 $i = 1$ のときは明らか。 $i \geq 2$ の場合を考える。 $i' < i$ に対して $TD(i', j)$ が i' までを出支配し、 j までを双方向支配する最小の集合であると仮定する。式 (1) による $TD(i, j)$ が i までを出支配し、 j までを双方向支配する最小の集合でないと仮定する。このとき、 i までを出支配し、 j までを双方向支配する $|S| < TD(i, j)$ であるような S が存在する。集合 S に含まれる最大の頂点を y とする。 y は $\{y, y+1, \dots, i\}$ を出支配し、 $\{LN(y), \dots, y-1, y\}$ を入支配する。 $U = S \setminus \{y\}$ とおく。 $LN(y) \leq j$ である場合について考える。このとき、 U は $\{1, 2, \dots, LN(y)-1\}$ を双方向支配し、 $\{LN(y), \dots, y-1\}$ を出支配する集合である。定義より $TD(y-1, LN(y)-1) \leq |U|$ であるので、 $|\{y\} \cup TD(y-1, LN(y)-1)| \leq |\{y\} \cup U| = |S|$ となる。帰納法の仮定より $|TD(y-1, LN(y)-1)| \leq |U|$ であるので、 $TD(i, j) \leq |\{y\} \cup TD(y-1, LN(y)-1)| \leq |\{y\} \cup U| = |S|$ となる。これは $|S| < |TD(i, j)|$ という仮定に矛盾する。そして、 $LN(y) > j$ である場合についても同様である。

以上より、 $TD(i, j)$ は、 i までを出支配し、 j までを双方向支配する最小の集合である。 $\square$

定理 1 にもとづいて、頂点数 n の向き付け区間グラフの最小双方向支配集合 $TD(n, n)$ を求めるアルゴリズムを動的計画法を用いて設計できる。

まず、式 (1) より $TD(n, n) = \{n\} \cup TD(n -$

$1, LN(n) - 1)$ が成り立つ。よって、定理 1 を用いて $TD(n - 1, LN(n) - 1)$ を計算するアルゴリズム OIG-MTD を次のように設計できる。

アルゴリズム OIG-MTD

入力：向き付け区間グラフ $G = (V, A)$

出力： G における最小双方向支配集合 $TD(n, n)$

$TD(0, 0) = \emptyset;$

$TD(1, 0) = TD(1, 1) = \{1\};$

for $i = 1$ to $n - 1$ do

 for $j = 1$ to i do

 if $i == n - 1$ and $j > LN(n) - 1$ then break;

$TD(i, j) = \{1, 2, \dots, n\};$

$S = N^-[i];$

 while $S \neq \emptyset$ do

$k = \max(S);$

$S = S - \{k\};$

 if $LN(k) \leq j$ then

$TD = \{k\} \cup TD(k-1, LN(k)-1);$

 else $TD = \{k\} \cup TD(k-1, j);$

 if $|TD(i, j)| > |TD|$ then $TD(i, j) = TD;$

$S = S \cap N^-[k];$

 end while;

 end for;

end for;

output $TD(n, n) = \{n\} \cup TD;$

定理 2. アルゴリズム OIG-MTD は、向き付け区間グラフの最小の双方向支配集合を計算する。入力グラフの頂点数が n のときの時間計算量は $O(n^2m)$ である。ここで、 m は辺の数である。

参考文献

- [1] G.J. Chang, Algorithmic aspects of domination in graphs, in Handbook of Combinatorial Optimization (vol. 3), pp 339–405, 1998.
- [2] G. Chartrand, P. Dankelmann, M. Schultz, H.C. Swart, Twin domination in digraphs, Ars Combinatoria, vol. 67, pp. 105–114, 2003.
- [3] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater, Fundamentals of domination in graphs, Marcel Dekker, New York, 1998.