I-077

カラー全変動セミノルムを用いたカラー画像雑音除去の画質改善

Improvements in picture quality of color-image denoising with color total-variation semi-norms

高垣 陽介† 菅沼 俊樹† 小松 隆† 齊藤 隆弘†
Yousuke Takagaki Toshiki Suganuma Takashi Komatsu Takahiro Saito

1. まえがき

筆者らは先に，色差を考慮したカラー全変動（TV）セミノルムを新たに定義し，これを TV 雑音除去問題の正則化項に適用することでカラー画像の雑音除去が効率的に行えることを示した [1], [2]．しかし，TV 雑音除去法では，雑音強度が高くなるにつれ， TV 正則化手法特有の偽の均一な小領域が形成され，小面積の色斑として知覚される [3]．

本稿では，このようなアーティファクトの発生を抑制するため，マルチスケールタイプの勾配作用素と発散作用素を新たに定義し，これをカラーTV セミノルムの定義に導入し，新たなカラー画像 TV 雑音除去法を考案している．また，提案法による画質改善を実験的に明らかにしている．

2. カラー画像の勾配作用素と発散作用素 [1]

$n\times n\times 3$ のカラー画像 $u_{i,j,k}$ をラスタ走査して縦に一列に書き並べた $3N\ (:=3\times n^2)$ 次元ベクトルを $\mathbf{y}\in\mathbf{R}^N$ と表記し，カラー画像 u の空間をスカラ画像場 U と呼ぶ．$u_{i,j,1}$ を Red 成分 $r_{i,j}$ に，$u_{i,j,2}$ を Green 成分 $g_{i,j}$ に，$u_{i,j,3}$ を Blue 成分 $b_{i,j}$ に対応付ける．カラー画像 u の $l\ (:=(i-1)\cdot n+j)$ 番目の画素位置(i, j) において，三原色・色差の水平・垂直方向の一階差分を重み付けて一列に書き並べ，12 次元カラー勾配ベクトルを，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho}_l :=\big(&\nabla_H r_{i,j}, \nabla_V r_{i,j}, \nabla_H g_{i,j}, \nabla_V g_{i,j}, \nabla_H b_{i,j}, \nabla_V b_{i,j},\\
&\alpha\nabla_H (r-g)_{i,j}, \alpha\nabla_V (r-g)_{i,j}, \alpha\nabla_H (g-b)_{i,j},\\
&\alpha\nabla_V (g-b)_{i,j}, \alpha\nabla_H (b-r)_{i,j}, \alpha\nabla_V (b-r)_{i,j}\big)^T\\
=\ &\mathbf{A}_l^T\mathbf{y}\in\mathbf{R}^{12}, \qquad \alpha\ge 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\nabla_H f_{i,j} :=\begin{cases} f_{i,j+1}-f_{i,j}, & 1\le j\le n-1\\ 0, & j=n\end{cases}
\tag{2}
$$

$$
\nabla_V f_{i,j} :=\begin{cases} f_{i+1,j}-f_{i,j}, & 1\le i\le n-1\\ 0, & i=n\end{cases}
\tag{3}
$$

と定義する．なお，上式中の二つの作用素 ∇_H，∇_V は Neumann 境界条件を考慮して定義された水平・垂直方向の一階前進差分作用素である．また，パラメータαは非負の重み係数である．ここで，行列 $\mathbf{A}_l$ は $3N\times 12$ の行列である．式(1)の$\boldsymbol{\rho}_l$ の定義の下で，カラー勾配$\nabla_C u$ は $n\times n\times 12$ の三次元配列 w となり，w の空間をカラー勾配場 W と呼ぶ．また，各画素位置でのカラー勾配$\nabla_C u$ をラスタ走査して一列に書き並べた $M\ (:=12\times N)$ 次元のカラー勾配ベクトル$\boldsymbol{\rho}$を次式にて定義する．

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\rho} :=\left(\boldsymbol{\rho}_1^T, \boldsymbol{\rho}_2^T, \cdots, \boldsymbol{\rho}_N^T\right)^T = \mathbf{A}^T\mathbf{y}\in\mathbf{R}^{12N}=\mathbf{R}^M\\
&\mathbf{A} :=\left(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_N\right)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

† 神奈川大学, Kanagawa University

ここで，行列 $\mathbf{A}$ は，$3N\times M$ 行列である．

一方，カラー勾配場 W の三次元配列 w に作用するカラー発散作用素 div_C は，カラー勾配作用素∇_C の随伴作用素として次式にて一意に定義される．

$$
\left(\nabla_C u, w\right)_{\mathsf{W}}=\left(u, -\mathrm{div}_C\, w\right)_{\mathsf{U}}
\tag{5}
$$

カラー勾配作用素∇_C は，式(4)に示したように $\mathbf{y}$ に作用する行列 $\mathbf{A}^T$ としても記述できるので，カラー発散作用素 div_Cは，式(5)をベクトル表記した次式の関係より，

$$
\left(\mathbf{A}^T\mathbf{y}, \boldsymbol{\rho}\right)_{\mathbf{R}^M}=\mathbf{y}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\rho}=\left(\mathbf{y}, \mathbf{A}\boldsymbol{\rho}\right)_{\mathbf{R}^{3N}}
\tag{6}
$$

M 次元ベクトル$\boldsymbol{\rho}$に作用する $3N\times M$ の行列$-\mathbf{A}$ として記述でき，この関係よりカラー発散作用素 div_C の具体的な表現が以下のように一意に定まる．

以下では，配列 w を次式にて成分表記する．

$$
\begin{aligned}
w &:=\{w_{i,j,k} \mid i=1,\cdots n;\ j=1,\cdots n;\ k=1,\cdots,12\}\\
&:=\{a_{i,j}^{(k)} \mid i=1,\cdots n;\ j=1,\cdots n;\ k=1,\cdots,12\}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

ここで，$a^{(k)}$は，各画素位置 l において計算したカラー勾配ベクトル$\boldsymbol{\rho}_l$ の k 番目の要素を，画面全体で二次元配列として書き並べたものに相当する．式(7)の配列 w の成分表記法の下で，カラー発散 $\mathrm{div}_C\, w$ の演算は，次式の演算として定義される．

$$
\mathrm{div}_C w_{i,j}=\left(\mathrm{div}_C w_{i,j,1}, \mathrm{div}_C w_{i,j,2}, \mathrm{div}_C w_{i,j,3}\right)^T
\tag{8}
$$

上式の右辺の三要素は，先頭から順に，画素位置(i, j)における三原色成分 r, g, b に対応した要素である．これらの要素の具体的な演算公式は，式(7)の配列 w の成分表記法の下で，次式の演算公式として与えられる．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}_C\, w_{i,j,1} :=\ &\mathrm{div}_H\, a^{(1)}{}_{i,j}+\mathrm{div}_V\, a^{(2)}{}_{i,j}+\alpha\,\mathrm{div}_H\, a^{(7)}{}_{i,j}\\
&+\alpha\,\mathrm{div}_V\, a^{(8)}{}_{i,j}-\alpha\,\mathrm{div}_H\, a^{(11)}{}_{i,j}-\alpha\,\mathrm{div}_V\, a^{(12)}{}_{i,j}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$:(i, j, 1)$ is the pixel location (i, j) of the red signal r.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}_C\, w_{i,j,2} :=\ &\mathrm{div}_H\, a^{(3)}{}_{i,j}+\mathrm{div}_V\, a^{(4)}{}_{i,j}+\alpha\,\mathrm{div}_H\, a^{(9)}{}_{i,j}\\
&+\alpha\,\mathrm{div}_V\, a^{(10)}{}_{i,j}-\alpha\,\mathrm{div}_H\, a^{(7)}{}_{i,j}-\alpha\,\mathrm{div}_V\, a^{(8)}{}_{i,j}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$:(i, j, 2)$ is the pixel location (i, j) of the green signal g.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}_C\, w_{i,j,3} :=\ &\mathrm{div}_H\, a^{(5)}{}_{i,j}+\mathrm{div}_V\, a^{(6)}{}_{i,j}+\alpha\,\mathrm{div}_H\, a^{(11)}{}_{i,j}\\
&+\alpha\,\mathrm{div}_V\, a^{(12)}{}_{i,j}-\alpha\,\mathrm{div}_H\, a^{(9)}{}_{i,j}-\alpha\,\mathrm{div}_V\, a^{(10)}{}_{i,j}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$:(i, j, 3)$ is the pixel location (i, j) of the blue signal b.

$$
\mathrm{div}_H\, v_{i,j} :=\begin{cases} v_{i,j}, & j=1\\ -v_{i,j-1}, & j=n\\ v_{i,j}-v_{i,j-1}, & 2\le j\le n-1\end{cases}
\tag{12}
$$

$$
\mathrm{div}_V\, v_{i,j} :=\begin{cases} v_{i,j}, & i=1\\ -v_{i-1,j}, & i=n\\ v_{i,j}-v_{i-1,j}, & 2\le i\le n-1\end{cases}
\tag{13}
$$

ここで，div_H, div_V は，水平・垂直方向の一階前進差分作用素の随伴作用素に負の符号を付して定義された“水平・垂直方向の発散作用素”である．

3. 勾配作用素・発散作用素のマルチスケール化

3.1 間隔 2^m の水平・垂直方向の差分作用素

先に，2．で述べた“Neumann 境界条件を考慮した水平差分作用素 ∇_H と垂直差分作用素 ∇_V”は，1 画素間隔だけ離れた 2 画素間の前進差分として定義されていた．ここでは，まず，水平差分作用素 ∇_H と垂直差分作用素 ∇_V の古典的な定義を拡張し，“Neumann 境界条件を考慮した間隔 2^m の水平差分作用素 $\nabla_{H(2^m)}$ と垂直差分作用素 $\nabla_{V(2^m)}$”を，2^m 画素間隔だけ離れた 2 画素間の前進差分として次式にて定義する．

$$
\begin{aligned}
&\nabla_{H(2^m)} f_{i,j} = \begin{cases} f_{i,j+2^m} - f_{i,j} \ , & 1 \le j \le n-2^m \\ 0 \ , & n-2^m+1 \le j \le n \end{cases} \\
&\nabla_{V(2^m)} f_{i,j} = \begin{cases} f_{i+2^m,j} - f_{i,j} \ , & 1 \le i \le n-2^m \\ 0 \ , & n-2^m+1 \le i \le n \end{cases} \\
&2^m : \text{Dyadic scale}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots
\end{aligned}
\tag{14}
$$

3.2 間隔 2^m の水平発散作用素・垂直発散作用素

先に 2 .で述べたのと同様に，$n \times n$ のスカラ画像 u に対して定義された任意の差分作用素 ∇ は，一般に，スカラ画像 u の n^2 個の画素値をラスタ走査して縦に一列に書き並べた $N\,(:=n^2)$ 次元ベクトル $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^N$ に作用させる $M \times N$ 次元行列 $\mathbf{A}^T$ としても定義できる．ただし，一般に，M は N の倍数である．また，次式の関係が成立するので，

$$
\left(\mathbf{A}^T \mathbf{y}, \boldsymbol{\rho}\right)_{\mathbf{R}^M} = \mathbf{y}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\rho} = \left(\mathbf{y}, \mathbf{A}\boldsymbol{\rho}\right)_{\mathbf{R}^N} \tag{15}
$$

“差分作用素 ∇”の随伴作用素 ∇^* に負の符号を付した作用素 $-\nabla^*$ として定義された“発散作用素 div”は，M 次元ベクトル $\boldsymbol{\rho} \in \mathbf{R}^M$ に作用させる $N \times M$ 行列 $-\mathbf{A}$ としても定義できる。この関係を間隔 2^m の水平差分作用素 $\nabla_{H(2^m)}$ と垂直差分作用素 $\nabla_{V(2^m)}$ に適用することで，これらの差分作用素に対応した間隔 2^m の水平発散作用素 $\mathrm{div}_{H(2^m)}$ と垂直勾配発散作用素 $\mathrm{div}_{V(2^m)}$ の離散表現が次式のように一意に定まる。

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{div}_{H(2^m)} v_{i,j} = \begin{cases} v_{i,j} \ , & 1 \le j \le 2^m \\ -v_{i,j-2^m} \ , & n-2^m+1 \le j \le n \\ v_{i,j} - v_{i,j-2^m} \ , & 2^m+1 \le j \le n-2^m \end{cases} \\
&\mathrm{div}_{V(2^m)} v_{i,j} = \begin{cases} v_{i,j} \ , & 1 \le i \le 2^m \\ -v_{i-2^m,j} \ , & n-2^m+1 \le i \le n \\ v_{i,j} - v_{i-2^m,j} \ , & 2^m+1 \le i \le n-2^m \end{cases} \\
&2^m : \text{Dyadic scale}, \quad m = 0, 1, 2, \cdots
\end{aligned}
\tag{16}
$$

3.3 マルチスケール化のための Haar スケーリングフィルタとその随伴フィルタ

次に，マルチスケール化のための Haar スケーリングフィルタを導入する．$n \times n$ の二次元配列として定義されたスカラ画像 u に対する“スケール 2^m の Haar スケーリングフィルタ $h_{(2^m)}$”は，次式の周期的畳み込み和の演算として定義される．

$$
\left[h_{(2^m)} \otimes u\right]_{i,j} := \frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^{2^m-1} \sum_{l=0}^{2^m-1} u_{\mathrm{mod}(i+k-1;n)+1,\, \mathrm{mod}(j+l-1;n)+1} \tag{17}
$$

ここで，簡単のため，Haar スケーリングフィルタ $h_{(2^m)}$ を，必要に応じ，スカラ画像 u の画素値をラスタ走査して縦に一列に書き並べた N 次元ベクトル $\mathbf{y}$ に作用させる $N \times N$ 行列 $\mathbf{T}_{(2^m)}$ として，次式にて表記する．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}_{(2^m)}\mathbf{y} &\xleftrightarrow{1:1} \left[h_{(2^m)} \otimes u\right]_{i,j} \\
&:= \frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^{2^m-1} \sum_{l=0}^{2^m-1} u_{\mathrm{mod}(i+k-1;n)+1,\, \mathrm{mod}(j+l-1;n)+1}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

ここで，一般に，スケール 2^m の Haar スケーリングフィルタ $h_{(2^m)}$ の随伴フィルタ $h^*_{(2^m)}$ は，Haar スケーリングフィルタ $h_{(2^m)}$ に 1:1 で対応づけられた $N \times N$ 行列 $\mathbf{T}_{(2^m)}$ の転置行列 $\mathbf{T}^T_{(2^m)}$ によって一意に定まる．結局，スケール 2^m の Haar スケーリングフィルタ $h_{(2^m)}$ の随伴フィルタ $h^*_{(2^m)}$ は，次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}^T_{(2^m)}\mathbf{y} &\xleftrightarrow{1:1} \left[h^*_{(2^m)} \otimes u\right]_{i,j} \\
&:= \frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^{2^m-1} \sum_{l=0}^{2^m-1} u_{\mathrm{mod}(i-k-1;n)+1,\, \mathrm{mod}(j-l-1;n)+1}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

3.4 マルチスケール型の差分作用素と発散作用素

“Neumann 境界条件を考慮した間隔 2^m の水平差分作用素 $\nabla_{H(2^m)}$ と垂直差分作用素 $\nabla_{V(2^m)}$”を，“スケール 2^m の Haar スケーリングフィルタ $h_{(2^m)}$”と組み合わせ，マルチスケール型の水平差分作用素 ∇_{M-H} と垂直差分作用素 ∇_{M-V} を新たに定義する．一例として，次式には，スケール 2^0, 2^1, 2^2 の三つのスケールを組み合わせたマルチスケール型の水平差分作用素 ∇_{M-H} と垂直差分作用素 ∇_{M-V} の定義を示した．

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{w}_H := \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{H(1)} \\ \mathbf{w}_{H(2)} \\ \mathbf{w}_{H(4)} \end{pmatrix} = \nabla_{M-H} u := \begin{pmatrix} \nabla_{H(1)} u \\ \gamma_{(2)} \nabla_{H(2)} \left(h_{(2)} \otimes u\right) \\ \gamma_{(4)} \nabla_{H(4)} \left(h_{(4)} \otimes u\right) \end{pmatrix} \\
&\mathbf{w}_V := \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{V(1)} \\ \mathbf{w}_{V(2)} \\ \mathbf{w}_{V(4)} \end{pmatrix} = \nabla_{M-V} u := \begin{pmatrix} \nabla_{V(1)} u \\ \gamma_{(2)} \nabla_{V(2)} \left(h_{(2)} \otimes u\right) \\ \gamma_{(4)} \nabla_{V(4)} \left(h_{(4)} \otimes u\right) \end{pmatrix} \\
&0 < \gamma_{(2)} < 1, \ 0 < \gamma_{(4)} < 1
\end{aligned}
\tag{20}
$$

スカラパラメータ $\gamma_{(2)}$, $\gamma_{(4)}$ は，マルチスケールに対する重みパラメータである．式(20)のマルチスケール型の水平差分作用素 ∇_{M-H} と垂直差分作用素 ∇_{M-V} は，スカラ画像 u の画素値をラスタ走査して縦に一列に書き並べた N 次元ベクトル $\mathbf{y}$ に対する行列演算として，次式にて表現される．

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\rho}_H := \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_{H(1)} \\ \boldsymbol{\rho}_{H(2)} \\ \boldsymbol{\rho}_{H(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^T_{H(1)} \\ \mathbf{B}^T_{H(2)} \\ \mathbf{B}^T_{H(4)} \end{pmatrix} \mathbf{y} := \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T_{H(1)} \\ \gamma_{(2)} \mathbf{A}^T_{H(2)} \mathbf{T}_{(2)} \\ \gamma_{(4)} \mathbf{A}^T_{H(4)} \mathbf{T}_{(4)} \end{pmatrix} \mathbf{y} \\
&\xleftrightarrow{1:1} \ \mathbf{w}_H := \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{H(1)} \\ \mathbf{w}_{H(2)} \\ \mathbf{w}_{H(4)} \end{pmatrix} = \nabla_{M-H} u := \begin{pmatrix} \nabla_{H(1)} u \\ \gamma_{(2)} \nabla_{H(2)} \left(h_{(2)} \otimes u\right) \\ \gamma_{(4)} \nabla_{H(4)} \left(h_{(4)} \otimes u\right) \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$$\boldsymbol{\rho}_V := \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_{V(1)} \\ \boldsymbol{\rho}_{V(2)} \\ \boldsymbol{\rho}_{V(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{V(1)}^T \\ \mathbf{B}_{V(2)}^T \\ \mathbf{B}_{V(4)}^T \end{pmatrix} \mathbf{y} := \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{V(1)}^T \\ \gamma_{(2)} \mathbf{A}_{V(2)}^T \mathbf{T}_{(2)} \\ \gamma_{(4)} \mathbf{A}_{V(4)}^T \mathbf{T}_{(4)} \end{pmatrix} \mathbf{y}$$
$$\xleftrightarrow{1:1} \mathbf{w}_V := \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{V(1)} \\ \mathbf{w}_{V(2)} \\ \mathbf{w}_{V(4)} \end{pmatrix} = \nabla_{M-V} u := \begin{pmatrix} \nabla_{V(1)} u \\ \gamma_{(2)} \nabla_{V(2)} \left(h_{(2)} \otimes u \right) \\ \gamma_{(4)} \nabla_{V(4)} \left(h_{(4)} \otimes u \right) \end{pmatrix} \tag{22}$$

このことと，一般に，“発散作用素 div は，差分作用素∇の随伴作用素∇^*に負の符号をつけた作用素$-\nabla^*$として定義される”ことから，マルチスケール型の水平差分作用素∇_{M-H}と垂直差分作用素∇_{M-V}に対応したマルチスケール型の水平発散作用素 div_{M-H} と垂直発散作用素 div_{M-V} の具体的な離散表現が，次式にて一意に定まる．

$$\hat{\mathbf{y}} := -\begin{pmatrix} \mathbf{B}_{H(1)} & \mathbf{B}_{H(2)} & \mathbf{B}_{H(4)} \end{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_H = -\begin{pmatrix} \mathbf{B}_{H(1)} & \mathbf{B}_{H(2)} & \mathbf{B}_{H(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_{H(1)} \\ \boldsymbol{\rho}_{H(2)} \\ \boldsymbol{\rho}_{H(4)} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\mathbf{A}_{H(1)} & \gamma_{(2)} \mathbf{T}_{(2)}^T \cdot \left(-\mathbf{A}_{H(2)} \right) & \gamma_{(4)} \mathbf{T}_{(4)}^T \cdot \left(-\mathbf{A}_{H(4)} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_{H(1)} \\ \boldsymbol{\rho}_{H(2)} \\ \boldsymbol{\rho}_{H(4)} \end{pmatrix}$$
$$\xleftrightarrow{1:1} \hat{\mathbf{u}} = \mathrm{div}_{M-H} \mathbf{w}_H \tag{23}$$
$$= \mathrm{div}_{H(1)} \mathbf{w}_{H(1)} + \gamma_{(2)} h_{(2)}^* \otimes \left(\mathrm{div}_{H(2)} \mathbf{w}_{H(2)} \right)$$
$$+ \gamma_{(4)} h_{(4)}^* \otimes \left(\mathrm{div}_{H(4)} \mathbf{w}_{H(4)} \right)$$

$$\hat{\mathbf{y}} := -\begin{pmatrix} \mathbf{B}_{V(1)} & \mathbf{B}_{V(2)} & \mathbf{B}_{V(4)} \end{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_V = -\begin{pmatrix} \mathbf{B}_{V(1)} & \mathbf{B}_{V(2)} & \mathbf{B}_{V(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_{V(1)} \\ \boldsymbol{\rho}_{V(2)} \\ \boldsymbol{\rho}_{V(4)} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\mathbf{A}_{V(1)} & \gamma_{(2)} \mathbf{T}_{(2)}^T \cdot \left(-\mathbf{A}_{V(2)} \right) & \gamma_{(4)} \mathbf{T}_{(4)}^T \cdot \left(-\mathbf{A}_{V(4)} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho}_{V(1)} \\ \boldsymbol{\rho}_{V(2)} \\ \boldsymbol{\rho}_{V(4)} \end{pmatrix}$$
$$\xleftrightarrow{1:1} \hat{\mathbf{u}} = \mathrm{div}_{M-V} \mathbf{w}_V \tag{24}$$
$$= \mathrm{div}_{V(1)} \mathbf{w}_{V(1)} + \gamma_{(2)} h_{(2)}^* \otimes \left(\mathrm{div}_{V(2)} \mathbf{w}_{V(2)} \right)$$
$$+ \gamma_{(4)} h_{(4)}^* \otimes \left(\mathrm{div}_{V(4)} \mathbf{w}_{V(4)} \right)$$

3.5 カラー勾配作用素とカラー発散作用素のマルチスケール化

カラー画像に対してマルチスケール型のカラー勾配作用素∇_{M-C}を新たに定義するには，2.で述べたカラー画像のカラー勾配作用素∇_Cの式(1)の定義において，水平差分作用素∇_Hと垂直差分作用素∇_Vを，式(21)と式(21)で定義されたマルチスケール型の水平勾配作用素∇_{M-H}と垂直勾配作用素∇_{M-V}へと置換すればよい．また，カラー画像に対してマルチスケール型のカラー発散作用素 div $_{M-C}$を新たに定義するには，式(9), 式(10), 式(11)のカラー発散作用素 div $_C$ の定義において，水平発散作用素 div $_H$ と垂直発散作用素 div $_V$ を，式(23)と式(24)で定義されたマルチスケール型の水平発散作用素 div_{M-H}と垂直発散作用素 div_{M-V}へと置換すればよい．このように定義されたマルチスケール型のカラー発散作用素 div $_{M-C}$は，マルチスケール型のカラー勾配作用素∇_{M-C}の随伴作用素に負の符号を付した作用素$-\nabla^*_{M-C}$と一致する．

4．マルチスケール型の非等方性全変動カラー画像雑音除去

色差を考慮した非等方性カラーTVセミノルム $J_{AC}(u)$は各画素位置において，式(1)で定義されたカラー勾配ベクトル $\boldsymbol{\rho}_l$の l^1 ノルムを，カラー画像内で全て加算することで，

$$J_{AC}(u) := \sum_{l=1}^{N} \left\| \boldsymbol{\rho}_l \right\|_1 = \sum_{l=1}^{N} \left\| \mathbf{A}_l^T \mathbf{y} \right\|_1 \tag{25}$$

と定義される [1]．ここで，M 次元の双対変数ベクトル $\mathbf{x}$ を導入し，さらに双対変数ベクトル $\mathbf{x}$ に関する制約条件に対応した空間 X_∞を

$$\mathsf{X}_\infty := \left\{ \mathbf{x} \,\middle|\, \left\| \mathbf{x} \right\|_\infty \le 1,\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^{18N} = \mathbf{R}^M \right\} \tag{26}$$

と定義すると，非等方性カラーTV セミノルム $J_{AC}(u)$ の次式の双対定義が得られる．

$$J_{AC}(u) = \max_{\mathbf{x} \in \mathsf{X}_\infty} \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \max_{\mathbf{x} \in \mathsf{X}_\infty} \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y} \tag{27}$$

空間 X_∞は M 次元線形空間 $\mathbf{R}^M$ の原点を中心とした M 次元単位 l^∞超球であり，閉凸であるので，M 次元ベクトル $\mathbf{x}$ の閉凸空間 X_∞の上への凸射影は，$\mathbf{x}$ の各要素 x_i ($i = 1, 2, \cdots, N$) に，次式の Clipping 演算を適用することで計算される．

$$\left[\mathrm{P}_{\mathsf{X}_\infty}(\mathbf{x}) \right]_i = \mathrm{Clip}(x_i) := \begin{cases} \mathrm{sgn}(x_i), & |x_i| \ge 1 \\ x_i\ , & |x_i| < 1 \end{cases},\ i = 1, 2, \cdots, M \tag{28}$$

非等方性カラーTV セミノルムを用いた非等方性全変動カラー画像雑音除去問題は次式の最適化問題として定式化される．

$$\min_{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{3N}} \mathrm{E}(\mathbf{y}) := J_{AC}(u) + \frac{\lambda}{2} \left\| \mathbf{y} - \mathbf{z} \right\|_2^2,\quad \lambda > 0 \tag{29}$$

$\mathbf{z} \in \mathbf{R}^{3N}$: Input image vector, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{3N}$: Output image vector
$u \in \mathsf{U}$: Output image array

式(29)の非等方性全変動カラー画像雑音除去問題にカラーTV セミノルムの双対定義を導入すると，その主－双対問題が次式のように定式化される．

$$\min_{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{3N}} \max_{\mathbf{x} \in \mathsf{X}_\infty} \Phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) := \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \frac{\lambda}{2} \left\| \mathbf{B} \mathbf{y} - \mathbf{z} \right\|_2^2,\quad \lambda > 0 \tag{30}$$

この問題の解法として次式の射影勾配解法が導出される．

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathrm{P}_{\mathsf{X}_\infty} \left(\mathbf{x}^{(k)} + 2\varepsilon\lambda \mathbf{A}^T \left(\mathbf{z} - \frac{1}{\lambda} \mathbf{A} \mathbf{x}^{(k)} \right) \right) \tag{31}$$

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{z} - \frac{1}{\lambda} \mathbf{A} \mathbf{x}^{(k)} \tag{32}$$

ここで，$\mathrm{P}_{\mathsf{X}_\infty}$ は閉凸空間 X_∞の上への凸射影，$\mathbf{x}^{(k)}$ は双対変数ベクトルの k 回目の更新ベクトル，ε はステップサイズパラメータである．式(31)と式(32)において，$\mathbf{z} \to f$（入力カラー画像），$\mathbf{x} \to w$（双対変数配列），$\mathbf{A}^T\mathbf{z} \to \nabla_C f$（カラー勾配），$-\mathbf{A}\mathbf{x} \to \mathrm{div}_C\, w$（カラー発散）と置き換えると，画像に対する演算として表現された次式を得る．

$$w^{(k+1)} = \mathrm{P}_{\mathsf{X}_\infty} \left(w^{(k)} + 2\varepsilon\lambda \nabla_C \left(f + \frac{1}{\lambda} \mathrm{div}_C\, w^{(k)} \right) \right) \tag{33}$$

$$u^{(k+1)} = f + \frac{1}{\lambda} \mathrm{div}_C\, w^{(k+1)} \tag{34}$$

ここで，カラー勾配作用素∇_Cとしてマルチスケール型のカラー勾配作用素∇_{M-C}を採用し，カラー発散作用素 div $_C$ としてマルチスケール型のカラー発散作用素 div $_{M-C}$を採用

することで，直ちに，マルチスケール型の非等方性カラーTV 画像雑音除去アルゴリズムが構成される．

5. 雑音除去シミュレーション

図 1 の Kodak の標準カラー画像を原画像とし，これに標準偏差$\sigma = 20$ とした白色ガウス性雑音を付加したカラー画像をテストカラー画像として用いて雑音除去シミュレーションを行った．雑音除去シミュレーションでは，考慮するスケール 2^m を $m = 0$ から $m = 3$ までとし，マルチスケール重みパラメータ$\gamma_{(m)}$を$\gamma_{(m)} = 1/2^m$ と設定した．また，比較のため，マルチスケールを考慮しない“従来の非等方性カラーTV セミノルムを用いた雑音除去 [2]” の結果を合わせて示した．さらに，図 5 に示したように，雑音除去画像を上半分と下半分の領域に二分割し，雑音除去画像全体での PSNR，雑音除去画像の上半分領域での PSNR，雑音除去画像の下半分領域での PSNR を求め，これらの PSNR 値を表 1 に比較して示した．

PSNR の観点からは，複雑なテクスチャが多く，色の変化の激しい下半分の画像領域では従来の非等方性カラーTV 雑音除去法（従来法）[2] が優位であるが，緩やかな変化を多く含む上半分の画像領域ではマルチスケール型の非等方性カラーTV 雑音除去法（提案法）がより高い PSNR を示した．また，従来の非等方性カラーTV 雑音除去法の図 3 の結果と，マルチスケール型の非等方性カラーTV 雑音除去法の図 4 の結果とを比較すると，提案手法では従来法で発生していた TV 正則化手法特有の偽の小面積の色斑の発生が抑制され，緩やかな変化領域での視覚的印象が向上している．

表 1　雑音除去画像の PSNR [dB]

kodim21	雑音付加画像	従来法	提案手法
全画像領域	22.19	30.89	30.83
上画像領域	22.15	34.38	34.51
下画像領域	22.23	28.97	28.86

6. むすび

TV セミノルムを正則化項として用いた TV 画像雑音除去法の更新計算は，隣接画素間の演算から構成されており，緩やかな変化領域では偽の均一な小領域が形成され，小面積の色斑妨害が生じるとい欠点を有していた．本稿では，広い範囲の画素を考慮したマルチスケール型のカラー勾配作用素を新たに定義し，これを用いて TV 画像雑音除去法の更新計算を構成することによって，この問題を改善することができることを実験的に明らかにした．

今後，マルチスケールのレベル数やマルチスケール重みパラメータの適応制御法について検討する予定である．

7. 文 献

[1] 齊藤隆弘, 高垣陽介, 小松 隆, “全変動カラー画像復元問題とその近接勾配解法”, FIT 2010, 4J-1, 2010.

[2] 高垣陽介, 齊藤隆弘, 小松 隆, “非等方性カラーTV セミノルムを用いたカラー画像雑音除去”, FIT 2010, 4J-1, 2010.

[3] 小松 隆, 齊藤隆弘, “多重解像度 TV 離散化を用いたカラー画像雑音除去”, 映像情報メディア学会 2008 年次大会, 1-3, 2008.

図 1 原カラー画像の一部分

図 2 雑音付加画像($\sigma = 20$) の一部分

図 3 従来の非等方性カラー TV 雑音除去法（従来法）[2] の雑音除去画像の一部

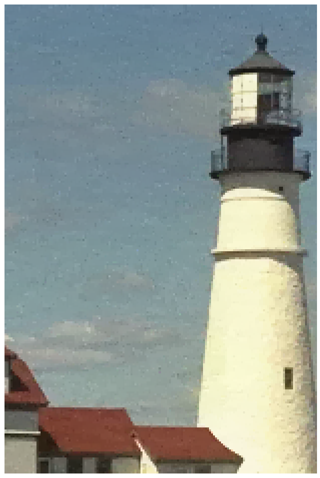

図 4 マルチスケール型の非等方性カラーTV 雑音除去法（提案法）の雑音除去画像の一部

図 5　雑音除去画像の PSNR の計算領域の分割