F-012

AHP における最良代替案判定関数を用いた一対比較の削減

Reduction of Paired Comparison Using Best Alternative Judgment Function based on Analytic Hierarchy Process

但野 友美† 川村 秀憲† 鈴木 恵二†
Yumi Tadano Hidenori Kawamura Keiji Suzuki

1. はじめに

人間の主観的な勘や経験等を数値化した意思決定支援手法に Saaty の AHP(Analytic Hierarchy Process)がある[1,2]. AHP は問題を階層構造に分解し，各レベルの項目間で親要素に対する一対比較を行うことにより，全体の総合評価を算出する．人間の嗜好やイメージなどの主観的判断による指標を一対比較により数値化することが出来，手続きが簡単で理解しやすいことから様々な意思決定問題へ応用されている[3].

AHP において複数の代替案の相対的な重要度を求める際, 代替案の数が多くなると一対比較の総数が増え，全ての対を比較することは困難となる．ところが一方で，最良な代替案のみを求める場合に着目すると，一対比較の中にはどのような一対比較値にしても結果に影響しない部分があると考えられる．そこで本研究ではこれまでに，一対比較行列の全比較値パターンと各パターンにおける最良代替案を列挙し，一対比較が全て終わらなくてもその時点で有りうる一対比較パターンにおける最良代替案が全て一致する場合に，それ以降の一対比較を停止する方法として比較支援法を提案した．

評価項目数 2，代替案数 3 の場合について，比較支援法を用いた際の一対比較数を調査する実験を行った結果，最良代替案が求まるまでの一対比較数は従来の AHP の平均 82%であることが分かった．また，全体の約 4 割が全ての一対比較値の入力を終える前に解が求まることが分かった [4-6].

比較支援法において一対比較値パターンと最良代替案は木構造で表しており，今後，解の探索を行う上で最良代替案を決定するための判定関数が必要である．そこで本稿では一対比較行列の計算法として幾何平均法を用いて判定関数を作成し，さらに判定関数を用いて不完全な一対比較でも最良代替案が決まっている場合があることを証明する．

2. 最良な代替案の判定

一対比較行列から各項目の重要度を算出する手法として幾何平均法を用い，最良な代替案の判定関数を作成する． 幾何平均法とは，一対比較行列において i 番目の要素の重要度は第 i 行の幾何平均とする方法である[7]．幾何平均法を用いると，代替案における最終重要度の一般解は以下の式で表される．ここで，評価項目数 m，代替案数 n，代替案集合 $A=(a_i)$，評価項目における一対比較行列 X^0，評価項目 k における代替案間の一対比較行列 X^k (k=1, 2, …, m) とし，$X=(X^0, X^1, …, X^m)$は完全な一対比較行列の組を，a_i は最良な代替案を，w_i は代替案 a_i の最終重要度を表している．

† 北海道大学大学院情報科学研究科, Graduate School of Information Science and Technology, Hokkaido University

最終重要度の一般解

$$f(X,a_i)=w_i$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{\sqrt[m]{\frac{\prod_{l=k+1}^{m}x_{kl}^{0}}{\prod_{l=1}^{i-1}x_{lk}^{0}}}\sqrt[n]{\frac{\prod_{l=i+1}^{n}x_{il}^{k}}{\prod_{l=1}^{i-1}x_{li}^{k}}}}{\sum_{j=1}^{m}\sqrt[m]{\frac{\prod_{l=j+1}^{m}x_{jl}^{0}}{\prod_{l=1}^{j-1}x_{lj}^{0}}}\sum_{j=1}^{n}\sqrt[n]{\frac{\prod_{l=j+1}^{n}x_{jl}^{k}}{\prod_{l=1}^{j-1}x_{lj}^{k}}}}$$

上記の一般解を用いて，完全な一対比較行列の組 X を与えたときに，a_i が最良な代替案であるか判定する関数を以下のように定義する．

代替案の最良判定関数

$$F_1(X,a_i)=\begin{cases} true & f(X,a_i)>f(X,a_j) \quad (\forall j, j\neq i) \\ false & otherwise \end{cases}$$

以上を用いて，未比較の一対比較が含まれる不完全な一対比較行列の組を X^*としたとき，a_i が最良な代替案であるか判定する関数を以下のように定義する．

条件判定関数

$$F_2(X^{:},a_i)=\begin{cases} true & F_1(X,a_i)=true \quad (\forall X^*) \\ false & otherwise \end{cases}$$

3. 不完全一対比較において最良代替案が決定している場合の存在証明

本章では階層構造が 3 階層であり，全ての評価項目における代替案間の一対比較行列の要素が $x_{1j}^{k}=\alpha$ （ただし，j=1, 2, …, n, k=1, 2,…, m, $1/\alpha \leqq x_{ij}^{k} \leqq \alpha$）の場合において，不完全な一対比較でも最良代替案が決定している場合が存在することを証明する．

Copyright © 2011 by Information Processing Society of Japan and The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers
All rights reserved.

証明

全ての有り得る一対比較行列の組 X において，$f(X, a_1) > f(X, a_i)$ (i=2, 3,…, n) が成立つことを証明すればよい

$$f(X,a_1)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\sqrt[m]{\frac{\prod_{l=k+1}^{m}x_{kl}^{0}}{\prod_{l=1}^{i-1}x_{lk}^{0}}}\sqrt[n]{\alpha^{n-1}}}{\sum_{j=1}^{m}\sqrt[m]{\frac{\prod_{l=j+1}^{m}x_{jl}^{0}}{\prod_{l=1}^{j-1}x_{lj}^{0}}}\sum_{j=1}^{n}\sqrt[n]{\frac{\prod_{l=j+1}^{n}x_{jl}^{k}}{\prod_{l=1}^{j-1}x_{lj}^{k}}}} \tag{1}$$

$$f(X,a_i)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\sqrt[m]{\frac{\prod_{l=k+1}^{m}x_{kl}^{0}}{\prod_{l=1}^{i-1}x_{lk}^{0}}}\sqrt[n]{\frac{\prod_{l=i+1}^{n}x_{il}^{k}}{\alpha\prod_{l=2}^{i-1}x_{li}^{k}}}}{\sum_{j=1}^{m}\sqrt[m]{\frac{\prod_{l=j+1}^{m}x_{jl}^{0}}{\prod_{l=1}^{j-1}x_{lj}^{0}}}\sum_{j=1}^{n}\sqrt[n]{\frac{\prod_{l=j+1}^{n}x_{jl}^{k}}{\prod_{l=1}^{j-1}x_{lj}^{k}}}} \tag{2}$$

より，

$$f(X,a_1)-f(X,a_i)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\sqrt[m]{\frac{\prod_{l=k+1}^{m}x_{kl}^{0}}{\prod_{l=1}^{i-1}x_{lk}^{0}}}\left(\sqrt[n]{\alpha^{n-1}}-\sqrt[n]{\frac{\prod_{l=i+1}^{n}x_{il}^{k}}{\alpha\prod_{l=2}^{i-1}x_{li}^{k}}}\right)}{\sum_{j=1}^{m}\sqrt[m]{\frac{\prod_{l=j+1}^{m}x_{jl}^{0}}{\prod_{l=1}^{j-1}x_{lj}^{0}}}\sum_{j=1}^{n}\sqrt[n]{\frac{\prod_{l=j+1}^{n}x_{jl}^{k}}{\prod_{l=1}^{j-1}x_{lj}^{k}}}} \tag{3}$$

となる．ここで，$1/\alpha \leqq x_{ij}^{k} \leqq \alpha$ より，

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\sqrt[m]{\frac{\prod_{l=k+1}^{m}x_{kl}^{0}}{\prod_{l=1}^{i-1}x_{lk}^{0}}}}{\sum_{j=1}^{m}\sqrt[m]{\frac{\prod_{l=j+1}^{m}x_{jl}^{0}}{\prod_{l=1}^{j-1}x_{lj}^{0}}}\sum_{j=1}^{n}\sqrt[n]{\frac{\prod_{l=j+1}^{n}x_{jl}^{k}}{\prod_{l=1}^{j-1}x_{lj}^{k}}}}>0 \tag{4}$$

であるから，$f(X, a_1) > f(X, a_i)$を示すには，$\forall k$ (k=1, …, m) において

$$\left(\sqrt[n]{\alpha^{n-1}}-\sqrt[n]{\frac{\prod_{l=i+1}^{n}x_{il}^{k}}{\alpha\prod_{l=2}^{i-1}x_{li}^{k}}}\right)>0 \tag{5}$$

を示せばよい．$1/\alpha \leqq x_{ij}^{k} \leqq \alpha$ より，

$$\max\sqrt[n]{\frac{\prod_{l=i+1}^{n}x_{il}^{k}}{\alpha\prod_{l=2}^{i-1}x_{li}^{k}}}=\sqrt[n]{\alpha^{n-3}} \tag{6}$$

したがって，$\sqrt[n]{\alpha^{n-1}}-\sqrt[n]{\alpha^{n-3}}>0$ により，式(5)は成立つ．よって，全ての有り得る一対比較行列の組 X において，$f(X, a_1) > f(X, a_i)$ (i =2, 3,…, n) が成立つことが示された．

4. おわりに

本稿ではこれまでの研究において提案した比較支援法における解の探索に用いるために，不完全な一対比較より最良な代替案を判定する関数を，一対比較行列の計算法として幾何平均法を用いて作成した．さらに不完全な一対比較でも最良代替案が決まっている場合があることを証明した．今後，作成した判定関数を用いて比較支援法の有効性を検証する実験を行う．

参考文献

[1] Thomas, L. Saaty , How To Make A Decision:The Analytic Hierarchy Process. Interfaces,Vol.24, No.6, 1994; pp.19-43..

[2] 木下栄蔵: AHP の理論と実際, 日科技連, 2000

[3] 木下栄蔵: AHP による首都機能移転地域選定に関する分析, オペレーションズ・リサーチ,pp. 19-27, 2000

[4] Yumi Tadano, Hidenori Kawamura, Keiji Suzuki and Azuma Ohuchi, Termination Process of the Analytic Hierarchy Process, 13th Asia Pacific Symposium on Intelligent and Evolutionary Systems, Hakata, 2009

[5] Yumi Tadano, Hidenori Kawamura, Keiji Suzuki and Azuma Ohuchi, Comparison Support Method for Analytic Hierarchy Process, ASOR Bulletin, vol 29, No 4, pp.48-59, 2010,

[6] 但野友美, 川村秀憲, 鈴木恵二: AHP における一対比較プロセスの効率化, 電子情報通信学会「人工知能と知識処理研究会(IEICE SIGAI)」, Vol. 110, No. 462, 白馬, pp. 27-31, 2011

[7] 木下栄蔵: よくわかる AHP 孫子の兵法の戦略モデル, オーム社, 2006

Copyright © 2011 by Information Processing Society of Japan and
The Instiute of Electronics, Information and Communication Engineers
All rights reserved.