

最小重みの有向部分木アルゴリズムの実験的性能評価

Experimental Evaluation of Algorithm for Minimum-Weight Rooted Not-Necessarily-Spanning Arborescence Problem

安部 友輔*
Yusuke Abe

千葉 英史†
Eishi Chiba

1 はじめに

最小全点木問題や最小重み有向木問題 [1] は、組合せ最適化の分野で最も長い歴史を持つ問題の 1 つであり、極めて重要な問題である。通信回線ケーブルをどのように接続させるか、あるいは、どのように配置設計するかなど、多くの応用分野を内在する。

本論文では最小重み有向木問題 [1] のタスクを一般化した問題に取り組む。具体的には、有向閉路を持たない連結な有向グラフ上の各枝に任意の実数重みが与えられたとき、最小重みの根付き有向部分木を求めたい。この問題は文献 [3] で、初めて提案された。文献 [3] では、その問題が NP 困難であることを証明し、さらに、その問題に適したラグランジュ緩和法を提案した。

枝の重みが以下のいずれかの条件を満たす場合、多項式時間で最適解を求めることができる。

- (1) 各枝の重みが、非負の場合。
- (2) 各枝の重みが、負の場合。

(1) の場合は、根のみからなる有向木が最適解である。(2) の場合は、最小重み根指定 (全域) 有向木問題に帰着され、効率的に解ける方法が知られている [1]。

文献 [3] では、(1) と (2) を満たさない場合に対して、近似解を求める手法を提案した。具体的には、連結性制約に関するラグランジュ緩和を適用して、緩和と下界を求める。次に、得られた緩和と下界を利用して、実行可能解と上界を求める。以上の操作をラグランジュ乗数を毎回更新して、繰り返し行うことにより、実行可能解を改善していくものである。

文献 [3] では、計算実験の結果も示した。実験のために、非常に小さなグラフサイズを対象にし、また、各枝に付されている重みは偏ったものを仮定した。さらに、入力となるランダムグラフの生成手法が明確に記されていないため、計算実験を再現することができない。本論文では、文献 [3] の手法を実装し、比較的大きなサイズのグラフ、および広範囲にわたる各枝の重みを入力として、文献 [3] の手法が有効かどうか検討する。また、有向閉路を持たない連結な有向グラフの生成手法も提案する。

以下、第 2 章では用語の定義と問題の説明を行う。第 3 章では整数計画問題として定式化をする。第 4 章では緩和と下界を求めるラグランジュ緩和を紹介する。第 5 章では実行可能解と上界を求めるヒューリスティック H を紹介する。第 6 章では、ラグランジュ緩和とヒューリスティック H を組み合わせたラグランジュ緩和法を紹介する。第 7 章では入力となるグラフ生成アルゴリズムを提案する。第 8 章で計算実験の結果を示す。第 9 章でまとめと今後の課題を述べる。

2 問題の説明

本研究では、枝に重みの付いた閉路のない根付き有向グラフ上で、最小重み根付き部分有向木問題 (MRA 問題 (Minimum Weight-Rooted Not-Necessarily-Spanning Arborescence Problem)) に取り組む。

グラフ $G = \{N, A\}$ は、連結で閉路のない有向グラフとする。ここでは、 N は 2 つ以上の点の集合であり、 A は枝の集合である。各点にはトポロジカルソートされた連続した整数番号 $(1, 2, \dots, |N|)$ が付いており、常に低い番号の点から高い番号の点へ枝が接続している。枝が点 i から点 j に接続している場合、 i を j の先行ノード、 j を i の後続ノードとそれぞれ呼ぶ。また、 j の先行ノードの集合を $P(j)$ 、 j の後続ノードの集合を $S(j)$ とする。

G が閉路のない有向グラフであり、ただ 1 つ根と呼ばれる点を持ち (根の番号は 1)、ただ 1 つルートアークと呼ばれる枝を持つとき (ルートアークは、点 1 から点 2 へと接続している枝 $(1, 2)$)、 G を閉路のない根付き有向グラフと呼ぶ。もしそれぞれの枝 (i, j) が $W(i, j)$ という実数の重みを持つとき、 G を枝に重みをもつ根付き有向グラフと呼ぶ。以下では、枝に重みを持つ根付き有向グラフのみを扱うこととする。

また G の部分グラフが、(1) ルートアークを含む、(2) 連結である、(3) 同じ点に向かって 2 本以上枝が接続しない (つまり、各点の入次数が高々 1 である) という条件を満たすとき、 G の根付き有向木 $RA(G)$ (Rooted Arborescence) と呼ぶ。

G 上で、根から点 $k (> 1)$ までの経路を、 $[1, (1, 2), 2, \dots, (i, j), j, (j, k), k]$ と書く。この点 k までの経路の中で、経路上の重みの合計値が最小となる経路を、 $MWRP(k)$ (Minimum Weight Rooted Path) と書き、

*法政大学 工学研究科 システム工学専攻

†法政大学 理工学部 経営システム工学科

そのときの経路上の重みの合計値を $w(\text{MWRP}(k))$ と書く。 G におけるすべての点の中で、根からの経路長が最小となる点を i とする。このとき、 $\text{WMRP}(i)$ を、 MWRPG と書く。 MWRPG の重みは $w(\text{MWRPG})$ と書く。なお、 MWRPG は最短経路アルゴリズムによって計算することができる。また文献 [3] では、すべての点が根からの経路を持つグラフを対象としている。本論文でも、そのようなグラフを対象とする。

図1に問題の入力例を示す。その入力例に対する最適解を図2に示す。

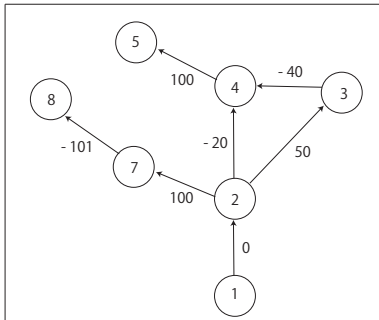


図1: 根つき閉路なしグラフの例

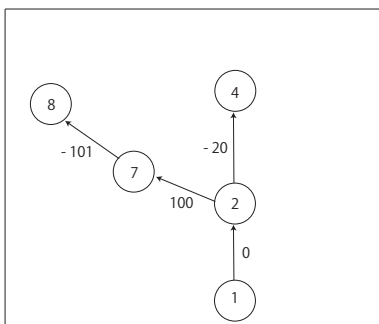


図2: 図1の $\text{MRA}(w(\text{MRA}) = -21)$

3 0-1 整数計画問題としての定式化

MRA 問題は以下のように 0-1 整数計画問題として記述できる。

$$z = \text{Min} \sum_{(i,j) \in A} W(i,j)Y(i,j) \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \sum_{i \in P(j)} Y(i,j) \leq 1, \quad j = 2, 3, \dots, N \quad (2)$$

$$Y(i,j) \leq \sum_{k \in P(i)} Y(k,i), \quad (i,j) \in A \setminus \{(1,2)\} \quad (3)$$

$$Y(1,2) = 1 \quad (4)$$

$$Y(i,j) \in \{0,1\}, \quad (i,j) \in A \setminus \{(1,2)\} \quad (5)$$

0-1 変数 $Y(i,j)$ は枝 $(i,j) \in A$ に対応している。 $Y(i,j) = 1$ は、枝 (i,j) を解に含むことを意味する。 $Y(i,j) = 0$ は、枝 (i,j) を解に含まないことを意味する。制約条件 (2) は、各点の入次数が高々1であることを意味する (入次数制約)。制約条件 (3) は、注目する枝を解に含めるとき、その枝の先行の枝も解に含まなくてはならないことを意味する (連結制約)。制約条件 (4) は、ルートアークは常に解に含めることを意味する。

4 ラグランジュ緩和

本章では、MRA 問題の下界を、ラグランジュ緩和を用いて求めるアルゴリズムを紹介する。緩和する制約条件は、連結制約 (3) であり、それぞれの枝 (i,j) に対応した、ラグランジュ乗数 $U = \{U(i,j) | (i,j) \in A, i > 1\}$ を導入する。緩和した問題を LMRA と呼ぶ。以下のように定式化できる。

$$\text{Min}_Y \left\{ \left[\sum_{(i,j) \in A} W(i,j)Y(i,j) \right] + \sum_{(i,j) \in A, i > 1} U(i,j) \left[Y(i,j) - \sum_{k \in P(i)} Y(k,i) \right] \right\} \quad (6)$$

s.t. (2), (4), (5)

入次数制約 (2) は、各点の入次数が高々1 という制約である。この制約に注目すると、各点において、ナップザック問題の制約条件であることが分かる (各点において、袋に詰めてよい枝は1個以下)。従って、各点 $j (> 1)$ に対して、点 j に入る全ての枝の中で、最小重みが0未満の枝が存在する場合に、その枝を解に含める。(6) を書き直すと、以下のように変形できる。

$$\text{Min}_Y \left\{ \sum_{(i,j) \in A} Y(i,j) [W(i,j) + U(i,j)] - \sum_{k \in S(j)} U(j,k) \right\} \quad (7)$$

s.t. (2), (4), (5)

なお、ここで求めた緩和解は有向森になっている。

5 ヒューリスティック H

本章では、MRA 問題の上界を求めるアルゴリズムを紹介する。このアルゴリズムをヒューリスティック H と呼ぶ。ヒューリスティック H のアイデアは、根から各点への最短経路を計算し、それらの中で最小の経路長を選択する。また、緩和解に含まれる枝集合を θ_{in} とし、 θ_{in} に含まれる枝は必ず選択する。このアルゴリズムは第4章で求めた有向森を有向木へと構成する。

1. 各 $(i, j) \in \theta_{in}$ に対して, (i, j) 以外に, 点 j に入る枝が存在するなら, その枝が解に含まれないようにするために, その枝の重みを ∞ にする. 枝を格納するためのリスト B1, リスト B2 を導入する.
2. G 中の MWRPG を求める. もし, $w(\text{MWRPG})$ が負ならば, MWRPG の枝をリスト B1 に追加して, それらの枝の重みを 0 に更新する. さらに, その MWRPG 上の各点に入る枝があれば, その枝の重みを ∞ に更新する. その後, 更新されたグラフに対して同様に, MWRPG を計算する. $w(\text{MWRPG})$ が負であれば, その MWRPG 上の枝をリスト B1 に追加する. ただし, 既にリスト B1 に存在する枝は追加しない. 追加した枝の重みを 0 に更新する. さらに, その MWRPG 上の点に入る枝が存在すれば, その枝の重みを ∞ に更新する. 以上の処理を $w(\text{MWRPG}) \geq 0$ になるまで繰り返す.
3. 負の重みを持つ枝が存在するなら, その枝の終点を k とする. $\text{MWRP}(k)$ を求め, Step 2 と同様の手順で枝の重みを更新する. ただし, ここで選択された枝はリスト B1 ではなく, リスト B2 に追加する (リスト B1 に既に含まれる枝は除く). リスト B2 に含まれる枝の重みの合計が負ならば, リスト B2 に含まれる全ての枝をリスト B1 に追加する. リスト B2 を空にする. この処理を, 負の重みを持つ枝がグラフ上に存在しなくなるまで繰り返す.
4. θ_{in} に含まれる枝の中でまだ選択されていない枝 (i, j) が存在すれば, 以下の処理を行う. 根から点 j までの最短経路を計算する. その最短経路上の枝をリスト B1 に追加する (ただし, リスト B1 に既に含まれている枝を除く). その後, Step 2 と同様の手順で枝の重みを更新する. この処理を, θ_{in} 中の枝が全て選択されるまで続ける.
3. (上界を求める) Step 2 で得られた枝の集合を θ_{in} として, ヒューリスティック H を実行する (現在までの最良) 上界 Z^{UB} を更新する必要があるならば, 更新する.
4. (停止条件) 以下の条件が 1 つでも成立すれば, 停止する.
 - (1) $Z^{UB} = Z_{LB} + \epsilon$.
 - (2) 繰り返し回数が上限を超える.
 - (3) 下界が収束する.
 どれも満たさない場合, Step 5 へ行く.
5. (ラグランジュ乗数の更新) 劣勾配法により, ラグランジュ乗数を更新する. 全ての劣勾配が 0 ならば, 停止する. そうでなければ, Step 2 へ戻る.

[劣勾配法]

$Y^*(i, j)$ を LMRA の解とする. k を繰り返し番号とすると, $U(i, j)$ を求めるための, 劣勾配 $NU(i, j)$ は以下のように求められる.

$$NU(i, j) = Y^*(i, j) - \sum_{(h, i) \in A} Y^*(h, i) \quad (8)$$

以下の関係式からラグランジュ乗数を求める.

$$U(i, j)^{k+1} = \max(U(i, j)^k + t_k NU(i, j), 0) \quad (9)$$

$$t_k = \lambda (Z^{UB} - Z_{LB}) / \sum_{(i, j)} (NU(i, j))^2 \quad (10)$$

λ は, 初め 0.6 とし, 8 回の繰り返し毎に, $1/2$ を乗じる. なお, λ 値の値の決め方にはいくつか選択肢が考えられるが, 上述の決め方により, 計算実験で満足の行く結果を得ることができた.

7 入力グラフの生成アルゴリズム

本章では, 入力となるグラフの生成手法を述べる. 次章の計算実験は, 本章の手法により入力を生成して行った.

[グラフ生成アルゴリズム]

入力: 点の数 n ($n \geq 2$), 枝の数 m ($n-1 \leq m \leq \frac{n^2-3n+4}{2}$)

根, ルートアークを作る.
点集合 $S := \{2\}$.

for($j = 3; j \leq n; j++$)

{
 S からランダムに 1 つ選び, その点を i とする.
 枝 (i, j) を作る.
 j を集合 S に加える.
}

6 ラグランジュ緩和法

ラグランジュ緩和法は, 第 4 章で紹介したラグランジュ緩和と, 第 5 章で紹介したヒューリスティック H を用いて, 上界と下界を更新し, 結果として解を改善していくアルゴリズムである. なお, ラグランジュ乗数の更新には劣勾配法 (文献 [2]) を用いる.

1. (初期化) $\theta_{in} = (1, 2)$ として, ヒューリスティック H を実行する. 全ての $(i, j) \in A$ に対して, ラグランジュ乗数 $U(i, j) = 0$ とする. (現在までの最良) 下界 $Z_{LB} = -\infty$ にする.
2. (下界を求める) ラグランジュ乗数 U を用いて, ラグランジュ緩和問題 (目的関数 (7), 制約条件 (2), (4), (5)) を解く. Z_{LB} を更新する必要があるならば, 更新する.

	グラフサイズ小				グラフサイズ大				全体
	一様分布	正規分布 (=40)	正規分布 (=30)	正規分布 (=20)	一様分布	正規分布 (=40)	正規分布 (=30)	正規分布 (=20)	
最適解を見つけたもの	86%	76%	88%	94%	6%	4%	6%	6%	45%
ヒューリスティック H の性能	28%	44%	44%	50%	14%	10%	12%	2%	25.5%
ラグランジュ緩和法の性能(更新回数)	72%	56%	56%	50%	86%	90%	88%	98%	74.5%
ラグランジュ緩和法の性能(更新率)	6.16%	2.83%	4.92%	3.08%	4.43%	5.65%	5.67%	5.18%	4.83%
相対ギャップ	0.36%	0.7%	0.4%	0.43%	1.01%	1.14%	1.25%	0.94%	1.08%
相対ギャップ(0より大きいもの)	68%	86%	78%	74%	98%	98%	100%	96%	87%

表 1: ヒューリスティック H , ラグランジュ緩和法の性能

```
//残りの枝  $m - n + 1$  個を作る.
for( $k = 1; k \leq (m - n + 1); k++$ )
{
   $S$  からランダムに1つ選び, その点を  $j$  とする.
   $S$  から  $j$  より小さい点を選び, その点を  $i$  とする.
  これまでに作った枝と重複する場合は,
   $i$  と  $j$  を選びなおす. 枝  $(i, j)$  を作る.
}
```

また, 枝の重みは, 乱数で決めた. 具体的には, 一様分布, 正規分布(平均0, 標準偏差20), 正規分布(平均0, 標準偏差30), 正規分布(平均0, 標準偏差40)のそれぞれ4つの分布に従うと仮定した. さらに, 値は全て整数と仮定した.

8 計算機実験

以下に実験環境を示す.

Machine: DELL Bostro 220s
CPU: Intel Core2 Duo E8400 @ 3.00GHz
OS: Windows XP Professional
Memory: 4GB
Compiler: Visual C++ 2010

実装の際, C++のクラスライブラリであるLEDAを用いてプログラムを作成した. 停止条件(1)は, $Z^{UB} - Z_{LB} < 1.0$ とし, 繰り返しの上限は500とした.

入力グラフを生成するのに, まず, 10個の異なる形のグラフを作る. そして, それぞれの形のグラフにおいて, 枝の重みを変えて5個のグラフを作る. 合計で50個のグラフを作る. 実験はグラフサイズ小と, グラフサイズ大において行う. グラフサイズ小は, 点が10~55個で, 枝が12~95個である. グラフサイズ大は, 点が100~550個で, 枝が120~950個である. グラフサイズ小は, 文献[3]の計算実験で, 入力として用いられたグラフサイズである. また, 枝の重みは文献[3]と同様に整数で発生させた.

以下に, 計測した値の説明をする. これらは, 文献[3]の計算実験で用いられたものと同じである. BESTUBは, 最も良い上界を表す値である. BESTLBは, 最も良い下界を表す値である. ITERUBは, BESTUBが見つかった時の, 繰り返し回数である. ITERLBは, BESTLBが見つかった時の, 繰り返し回数である. INITHEUR(Initial heuristic)は, 初めの上界を表す値である. TOTITER(Total iteration)は, ラグ

ランジュ緩和法が止まった時の繰り返し回数である. NUPDT(Number update)は, 上界が更新された数である. TIMESEC(Time sec)は, ラグランジュ緩和法の処理時間(秒表記)である. 表2, 表3に計算結果の一部を示す.

次に, ヒューリスティック H , ラグランジュ緩和法の性能を評価する値の説明をする. これらは, 文献[3]の計算実験で用いられたものと同じである. 最適解の発見率は, $100 \times$ (最適解が見つかった場合/すべての場合)で計算する. 枝の重みは整数で発生させたので, 上界と下界の差が1未満になったら最適解を発見したとする. ヒューリスティック H の性能は, $100 \times$ (INITHEURとBESTUBが等しかった場合/すべての場合)で計算する. ラグランジュ緩和法の性能(更新回数)は, $100 \times$ (INITHEURが少なくとも一回更新した場合/すべての場合)で計算する. ラグランジュ緩和法の性能(更新率)は, $Abs(100 \times (INITHEUR - BESTUB) / INITHEUR)$ で計算する. 双対ギャップは, $(Abs(100 \times (BESTUB - BESTLB) / BESTUB))$ で計算する. 双対ギャップは下界がどの程度, 最適値に近づいているかを示す値である.

文献[3]では, グラフサイズ小の範囲の入力でしか計算実験を行っていなかった. また, 最適解の発見率が88%であると記されている. 表1を見れば分かるようにグラフサイズが大きくなると, 最適解の発見率が大きく落ちていることが分かる. これは, ラグランジュ緩和法の性能を判断する上で誤解を生じさせる記述である.

表1を見ると, グラフサイズ小では重みの分布によって, ヒューリスティック H , ラグランジュ緩和法の性能が変わることが分かる. 文献[3]では, 重みの発生方法が記されていない. このことも, ラグランジュ緩和法, またヒューリスティック H の性能を判断する上で誤解を生じさせる.

9 結論と今後の課題

本論文の主な貢献は, 文献[3]で提案されたアルゴリズムの性能を公平に評価したことである. 具体的には, 比較的大きなグラフサイズ, および広範囲にわたる各枝の重みを入力として計算実験を行った. その結果, 文献[3]では, アルゴリズムの評価に誤解を生じさせる記述があることを指摘できた. また, 有向閉路を持たない連結な有向グラフの生成手法を提案した.

今後の課題は, グラフサイズが大きくなっても有効なアルゴリズムの開発である. また, 有向閉路を含む

一般的な有向グラフに対してのアルゴリズムの開発も重要である。

参考文献

- [1] B. Korte and J. Vygen, Combinatorial Optimization Theory and Algorithms Second Edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2002.
- [2] M. Held, P. Wolfe, and H. D. Crowder, “Validation of subgradient optimization,” Math Program 6, pp. 62–88, 1974.
- [3] V. V. Rao and R. Sridharan, “Minimum-weight rooted not-necessarily-spanning arborescence problem,” Networks, vol. 39(2), pp. 77–87, 2002.

Node	Arcs	BESTUB	BESTLB	ITERUB	ITERLB	INITHEUR	TOTITER	NUPDT	Time(sec)
10	12	-136	-136	1	1	-136	1	0	0
10	12	-64	-64.770983	1	11	-64	11	0	0
10	12	-89	-89.919451	1	26	-89	26	0	0
10	12	-64	-64.85	1	2	-64	2	0	0
10	12	-64	-64.85	1	2	-64	2	0	0
15	17	-89	-90.427425	1	499	-89	500	0	0.031
15	17	-80	-80.998645	1	24	-80	24	0	0
15	17	-176	-176.96818	1	28	-176	28	0	0
15	17	-121	-121	1	1	-105	1	1	0
15	17	-61	-61	39	39	-59	39	1	0
20	28	-90	-90.989584	1	53	-90	53	0	0
20	28	-183	-183.982876	1	23	-183	23	0	0
20	28	-154	-154.996157	1	39	-154	39	0	0
20	28	-226	-226.92836	1	26	-226	26	0	0
20	28	-112	-112.975248	1	31	-112	31	0	0
25	31	-160	-160.993656	1	27	-160	27	0	0
25	31	-200	-200.973021	1	109	-200	109	0	0.015
25	31	-152	-152.965519	1	24	-152	24	0	0
25	31	-201	-201.962076	1	42	-201	42	0	0
25	31	-183	-183.99111	1	60	-183	60	0	0
30	35	-204	-204.998817	1	67	-204	67	0	0.015
30	35	-144	-144.990226	1	118	-144	118	0	0.015
30	35	-368	-368.949369	1	39	-368	39	0	0
30	35	-322	-322	31	31	-315	31	1	0.015
30	35	-169	-169.9734	1	23	-169	23	0	0
35	55	-311	-311.990515	1	112	-311	112	0	0.031
35	55	-340	-340.960029	7	79	-315	79	2	0.015
35	55	-248	-248	94	94	-233	94	2	0.031
35	55	-304	-304	39	39	-294	39	2	0
35	55	-485	-485.994662	1	20	-453	20	1	0.015
40	73	-294	-294	67	67	-244	67	3	0.016
40	73	-420	-420.996787	1	314	-406	314	1	0.125
40	73	-444	-444	17	17	-420	17	2	0.015
40	73	-444	-444.319684	32	32	-410	32	2	0.015
40	73	-483	-483.989596	32	174	-445	174	2	0.062
45	79	-425	-425	159	159	-410	159	1	0.078
45	79	-233	-237.902229	29	500	-213	500	1	0.156
45	79	-584	-584.993722	1	170	-546	170	1	0.078
45	79	-515	-515	20	20	-490	20	1	0.015
45	79	-445	-445.99604	1	168	-445	168	0	0.078
50	86	-483	-483.983233	18	125	-451	125	2	0.063
50	86	-596	-596.986937	13	111	-545	111	3	0.062
50	86	-446	-446	43	43	-360	43	6	0.015
50	86	-489	-489	30	30	-460	30	2	0.031
50	86	-400	-400	100	100	-382	100	2	0.046
55	95	-519	-519.993039	5	169	-487	169	1	0.093
55	95	-670	-670.122389	70	69	-607	70	3	0.046
55	95	-525	-525.995301	62	132	-515	132	2	0.078
55	95	-584	-587.473462	1	498	-584	500	0	0.235
55	95	-709	-709.990702	1	211	-689	211	1	0.093
100	120	-647	-656.292518	7	499	-612	500	4	0.531
100	120	-669	-669	55	55	-660	55	1	0.078
100	120	-535	-538.311081	59	499	-490	500	5	0.453
100	120	-710	-719.926031	14	499	-668	500	5	0.625
100	120	-785	-785.984745	28	69	-771	69	1	0.078
150	170	-1451	-1466.272814	75	500	-1450	500	1	1.281
150	170	-990	-1001.266054	53	500	-941	500	4	0.984
150	170	-1147	-1167.14343	144	500	-1128	500	3	1.062
150	170	-792	-807.618635	1	500	-792	500	0	0.968
150	170	-1157	-1168.898372	52	499	-1143	500	2	0.969
200	280	-1681	-1689.408881	136	500	-1572	500	7	1.937
200	280	-1698	-1698	378	378	-1672	378	2	1.578
200	280	-1180	-1204.377895	50	500	-1158	500	3	2.015
200	280	-1535	-1549.599666	20	500	-1438	500	6	1.875
200	280	-1475	-1509.342334	19	500	-1433	500	5	2.031
250	310	-1595	-1620.349983	79	499	-1511	500	7	3.453
250	310	-2038	-2041.182539	121	500	-2030	500	2	2.765
250	310	-1838	-1854.62412	61	500	-1792	500	4	3.078
250	310	-1722	-1728.34198	67	500	-1675	500	6	2.625
250	310	-1609	-1618.235664	41	499	-1564	500	3	2.671
300	350	-1882	-1887.011059	135	500	-1872	500	1	3.812
300	350	-2079	-2085.380454	32	499	-2076	500	1	3.625
300	350	-1844	-1869.742157	39	500	-1796	500	9	5.625
300	350	-1785	-1810.820542	47	500	-1751	500	3	4.328
300	350	-1808	-1843.911507	18	500	-1759	500	1	3.875
350	550	-3031	-3054.498116	253	500	-2946	500	7	7.921
350	550	-2971	-2998.466551	27	500	-2862	500	7	6.687
350	550	-2680	-2688.339801	157	500	-2557	500	12	7.234
350	550	-2961	-3001.000372	71	459	-2859	500	11	6.719
350	550	-2599	-2622.67474	257	500	-2484	500	11	7
400	730	-3867	-3877.510175	114	500	-3445	500	13	10.062
400	730	-3570	-3622.518256	126	500	-3248	500	18	10.718
400	730	-3820	-3835.38171	336	500	-3599	500	16	11
400	730	-3874	-3919.648869	238	500	-3578	500	15	12.796
400	730	-4099	-4154.600814	92	500	-3747	500	17	10.421
450	790	-4255	-4279.432728	152	499	-4022	500	12	14.672
450	790	-4044	-4093.630539	137	500	-3780	500	16	16.14
450	790	-4055	-4117.481275	148	500	-3589	500	18	17.75
450	790	-4483	-4541.504948	39	500	-4152	500	9	14.468
450	790	-4371	-4453.94526	109	500	-4094	500	12	17.281
500	860	-4395	-4407.477647	257	500	-4115	500	16	14.11
500	860	-4680	-4727.397637	420	500	-4143	500	12	17.265
500	860	-4312	-4352.140156	126	500	-4080	500	10	16.187
500	860	-4687	-4739.9026	40	499	-4354	500	14	15.765
500	860	-4742	-4754.342975	171	500	-4395	500	16	16.125
550	950	-4974	-4982.465102	490	500	-4564	500	22	21.046
550	950	-5016	-5020.000256	339	447	-4758	500	14	22.656
550	950	-4300	-4369.979433	83	500	-4001	500	15	18.546
550	950	-4510	-4527.970182	134	499	-4118	500	14	20.406

表 2: 枝の重みが正規分布 (標準偏差 $\sigma = 20$) に従う場合

Node	Arcs	BESTUB	BESTLB	ITERUB	ITERLB	INITHEUR	TOTITER	NUPDT	Time(sec)
10	12	-143	-143.988924	1	53	-143	53	0	0.015
10	12	-141	-141.919243	1	28	-141	28	0	0
10	12	-81	-81.914286	1	2	-81	2	0	0
10	12	-88	-88.98956	1	31	-88	31	0	0
10	12	-188	-188	1	1	-188	1	0	0
15	17	-211	-211	22	22	-181	22	2	0
15	17	-156	-156.982433	1	45	-156	45	0	0
15	17	-186	-186.939361	1	22	-186	22	0	0
15	17	-184	-184.905198	1	38	-184	38	0	0
15	17	-322	-322.949933	12	88	-288	88	2	0.015
20	28	-376	-376.99734	1	127	-376	127	0	0.015
20	28	-240	-240.956741	1	79	-240	79	0	0
20	28	-291	-291.956311	1	47	-291	47	0	0.015
20	28	-116	-118.556559	1	500	-116	500	0	0.046
20	28	-322	-322.92359	1	15	-322	15	0	0
25	31	-533	-533.828029	1	20	-506	20	1	0
25	31	-222	-223.079824	1	500	-222	500	0	0.062
25	31	-343	-344.019723	1	500	-333	500	1	0.078
25	31	-213	-213.996708	1	104	-213	104	0	0.015
25	31	-273	-274.705333	1	500	-273	500	0	0.062
30	35	-272	-272.984884	1	46	-272	46	0	0.015
30	35	-410	-410	19	19	-399	19	1	0.015
30	35	-395	-395.976989	1	107	-395	107	0	0.015
30	35	-429	-429.954963	1	41	-429	41	0	0.015
30	35	-188	-208.000006	1	485	-188	500	0	0.093
35	55	-537	-537	80	80	-535	80	1	0.015
35	55	-592	-592.976391	6	168	-585	168	1	0.031
35	55	-414	-414.994418	13	85	-399	85	1	0.015
35	55	-689	-689.990933	1	296	-689	296	0	0.078
35	55	-771	-795.501392	36	497	-765	500	2	0.125
40	73	-474	-481.674075	25	500	-457	500	2	0.141
40	73	-698	-698.988592	1	51	-655	51	1	0.015
40	73	-662	-662.995401	20	144	-616	144	2	0.046
40	73	-748	-764.688998	23	500	-695	500	3	0.171
40	73	-623	-623	172	172	-622	172	1	0.062
45	79	-902	-902.987489	15	171	-878	171	2	0.062
45	79	-916	-916	122	122	-882	122	2	0.078
45	79	-857	-859.374693	29	499	-807	500	2	0.187
45	79	-725	-727.734425	42	500	-661	500	1	0.171
45	79	-1118	-1118.984738	1	145	-1003	145	1	0.062
50	86	-1149	-1177.947957	29	500	-1130	500	1	0.203
50	86	-1256	-1256.983153	1	148	-1235	148	1	0.078
50	86	-1344	-1344.996824	1	157	-1320	157	1	0.078
50	86	-614	-614.998711	7	208	-607	208	1	0.093
50	86	-1102	-1102.019793	150	149	-1059	150	7	0.078
55	95	-1002	-1002.995298	11	216	-976	216	2	0.125
55	95	-953	-962.336484	11	500	-931	500	2	0.218
55	95	-932	-932	57	57	-824	57	4	0.031
55	95	-1776	-1776.999027	15	124	-1644	124	2	0.078
55	95	-1233	-1233.995071	1	312	-1233	312	0	0.171
100	120	-1511	-1520.069699	25	500	-1497	500	1	0.5
100	120	-974	-981.096272	1	500	-974	500	0	0.468
100	120	-1358	-1366.838575	1	500	-1358	500	0	0.468
100	120	-1170	-1180.525658	43	500	-1152	500	1	0.593
100	120	-1592	-1640.429924	44	500	-1588	500	1	0.531
150	170	-1854	-1933.346924	24	500	-1753	500	2	1
150	170	-2050	-2060.024127	1	500	-2050	500	0	0.921
150	170	-1818	-1880.297851	22	500	-1805	500	1	1.437
150	170	-1733	-1756.232724	1	499	-1733	500	0	0.968
150	170	-1791	-1815.929785	40	500	-1746	500	2	1.078
200	280	-2783	-2818.805818	115	499	-2744	500	5	2
200	280	-3588	-3588.462235	237	237	-3519	237	5	1
200	280	-2662	-2697.309762	67	500	-2463	500	9	2.156
200	280	-3141	-3175.047853	49	500	-2972	500	6	2.171
200	280	-3009	-3031.967762	39	500	-2856	500	3	2.016
250	310	-4180	-4229.205994	1	499	-4180	500	0	2.969
250	310	-3033	-3101.604941	66	500	-3021	500	3	2.61
250	310	-3917	-3948.461679	14	500	-3765	500	4	2.5
250	310	-3865	-3900.777857	100	497	-3755	500	2	2.968
250	310	-3045	-3081.86957	385	500	-3022	500	3	3.484
300	350	-4213	-4213	226	226	-4117	226	5	1.984
300	350	-2938	-3042.757323	69	499	-2864	500	2	3.828
300	350	-4772	-4827.074792	35	500	-4684	500	5	4.359
300	350	-3931	-3956.801746	129	500	-3854	500	2	5.171
300	350	-4410	-4436.09114	65	500	-4349	500	2	4.328
350	550	-5009	-5121.518549	100	500	-4615	500	19	7.688
350	550	-6057	-6066.25741	197	500	-5853	500	7	8.093
350	550	-6322	-6367.813652	90	499	-5849	500	16	6.843
350	550	-6319	-6342.102943	40	500	-5932	500	15	7.328
350	550	-5951	-6018.750833	255	500	-5683	500	18	9.156
400	730	-7245	-7279.738917	282	500	-6921	500	8	10.89
400	730	-7921	-7936.2113	277	500	-7100	500	14	10.328
400	730	-7696	-7746.824643	152	499	-7128	500	19	13.25
400	730	-7329	-7391.454488	485	500	-6756	500	21	12.609
400	730	-7496	-7520.807444	188	500	-6684	500	17	10.234
450	790	-8201	-8260.785191	47	500	-7178	500	11	12.062
450	790	-9371	-9395.038253	165	500	-8885	500	15	13.656
450	790	-7384	-7553.833185	257	500	-7033	500	14	13.125
450	790	-8340	-8450.55679	366	499	-7163	500	15	15.656
450	790	-7531	-7698.218626	99	498	-6561	500	16	12.484
500	860	-8740	-8814.804567	186	500	-7736	500	20	16.375
500	860	-6988	-7066.329608	137	500	-6158	500	16	15.656
500	860	-8960	-9045.03646	118	499	-8296	500	16	16.687
500	860	-8623	-8651.72708	268	498	-7855	500	19	15.671
500	860	-8934	-9022.748471	73	500	-8281	500	10	16.796
550	950	-9980	-9993.855378	479	497	-9251	500	17	19.859
550	950	-9436	-9529.057204	312	500	-8814	500	21	22.031
550	950	-9386	-9478.781496	367	500	-8612	500	16	27.14
550	950	-9573	-9839.335036	149	500	-8756	500	8	19.64

表 3: 枝の重みが正規分布 (標準偏差 $\sigma = 40$) に従う場合