

配属人数下限付き研究室配属問題

The Laboratories/Students Problem with Quota Lower Bounds

上田 俊*
Suguru Ueda

岩崎 敦†
Atsushi Iwasaki

横尾 真†
Makoto Yokoo

1 はじめに

本論文では、研究室配属問題を多対一マッチング問題として解くことを考える。これは学生を研究室に割り当てる問題であり、各研究室への割当可能人数には上限と同時に下限が設定されることがある。これらの制限は通常、特定の研究室に学生が偏ることで生じる教員の負担の差を小さくするために設けられ、下限付き研究室配属問題 (Laboratories/Students problem with Minimum Quota, LSMQ) と呼ばれる。

しかし、この問題は一般に難しい問題とされており、全ての研究室の学生に対する選好が同一である (マスターリスト (Master List, ML) が存在する) 場合でさえも、安定なマッチングが存在しないことが知られている。Hamada ら [2] はこの LSMQ を 1ML-LSMQ と定義し、ブロッキングペアの数を最小化するマッチングを求める問題が NP 困難であることを示している。

2 下限付き研究室配属問題

本節では、Hamada ら [2] をもとに 1ML-LSMQ を定式化する。1ML-LSMQ は、学生の集合、研究室の集合、学生の選好リスト、学生に対する全研究室で共通の選好リスト (Master List, ML)、各研究室の配属数の上下限から構成する。ML の選好順に並べた学生の集合を $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ とし、 $i < i'$ ならば、ML で s_i は $s_{i'}$ よりも上位となる。研究室の集合を $L = \{l_1, l_2, \dots, l_m\}$ とし、研究室 l_j の下限を p_j 、上限を q_j とする。次に学生の選好リストは、全ての研究室に対して順位付けされたリストであるとする。つまり、選好リストにおいて、同順位の研究室や順位付けされていない研究室が存在しないと仮定する。これに対して、各研究室 l_j への p_j 以上 q_j 以下の数の学生の割当をマッチング M とし、集合 S から集合 L への写像とする。具体的には、マッチング M で学生 s_i が割り当てられている研究室を $M(s_i)$ 、 l_j に割り当てられている学生の集合を $M(l_j)$ とする。

次に、マッチングを決定するためのアルゴリズムが満

たすべき性質について概説する。まず**戦略的操作不可能**とは、学生 s_i にとって、自身の真の選好リストをアルゴリズムに申告したときに、自身の効用が最大となることを示している。

さらに学生 s_i が、現在割り当てられている研究室よりも、他の研究室 l_j を選好しており、研究室 l_j に自分より成績が下位の学生が割り当てられている、もしくは研究室 l_j の配属人数が上限に達していない場合に、その学生 s_i と研究室 l_j のペアを**ブロッキングペア**と定義する。一般にブロッキングペアが存在しないマッチングを安定マッチングと呼ぶ。1ML-LSMQ では安定なマッチングが必ず存在するとは限らないことが知られている。とくに上記で定義したブロッキングペアの数を最小化するアルゴリズムは多項式時間で解けないことが [2] における Theorem 3.1 で証明されている。そこで、本論文ではより限定的なブロッキングペアを定義することで、その限定されたブロッキングペアが存在しないマッチングを求める多項式時間アルゴリズムを提案する。

3 多項式時間アルゴリズム

本節では 1ML-LSMQ を解く多項式時間アルゴリズムについて述べる。従来のブロッキングペアの定義のもとでは、安定なマッチングを保証できない。そこで学生の不満を**正当と認められる不満** (justified envy) に限定したブロッキングペアを定義する。

定義 1 (正当と認められる不満). 学生 s_i が他の学生 $s_{i'}$ に正当と認められる不満を持つとは以下のどちらかの条件を満たすときとする。

1. $i < i'$ で、学生 s_i は現在の研究室 $M(s_i)$ よりも、学生 $s_{i'}$ の研究室 $M(s_{i'})$ を選好する。
2. $i < i'$ で、学生 s_i は現在の研究室 $M(s_i)$ よりも、別の研究室 l_j を選好し、 $|M(l_j)| < q_j$ 、かつ、学生 $s_{i'}$ の研究室 $l_{j'} = M(s_{i'})$ に関して、 $|M(l_{j'})| > p_{j'}$ が成立する。

ここでは、正当と認められる不満を研究室側の選好である ML にもとづいて定義している。つまり、ML で自分より下位に位置する学生に対する不満のみが正当と認められると考えている。これは文献 [1] における正当と

* 九州大学大学院 システム情報科学府・日本学術振興会特別研究員 DC1

† 九州大学大学院 システム情報科学研究院

認められる不満に定義 1 の条件 2 を加えた拡張となっている。

正当と認められる不満を用いて、ブロッキングペアを以下の 3 つに分類する。下限のない研究室配属問題におけるブロッキングペアをタイプ I とし、先に述べた下限を考慮することで発生するブロッキングペアをタイプ II と呼ぶ。さらに、本論文では正当と認められる不満に対応するブロッキングペアをタイプ III として導入する。具体的には、定義 1 の条件 1 を満たす不満を学生 s_i が学生 $s_{i'}$ に対して持つ場合、学生 s_i と研究室 $M(s_{i'})$ のペアがタイプ I のブロッキングペアとなる。また、定義 1 の条件 2 を満たす場合は学生 s_i と現在の割当より選好する研究室 l_j のペアがタイプ III のブロッキングペアとなる。

定義 2 (タイプ III のブロッキングペア). 以下の 3 つの条件を満たしている学生 s_i と研究室 l_j のペアをタイプ III のブロッキングペアという：

1. 学生 s_i は現在の研究室 $M(s_i)$ よりも研究室 l_j を選好している。
2. $|M(l_j)| < q_j$ が成立する。
3. $i < i'$ かつ、学生 $s_{i'}$ の研究室 $l_{j'} = M(s_{i'})$ に関して $p_{j'} < |M(l_j)|$ が成立する。

定義よりタイプ III のブロッキングペアは、タイプ II のブロッキングペアの部分集合となっている。タイプ I とタイプ III のブロッキングペアに含まれる学生が持つ不満は、正当と認められるとする。したがって、正当と認められる不満を持つ学生が少なくとも 1 人存在する場合、その学生を含むタイプ I もしくは III のブロッキングペアが、少なくとも一つ存在することになる。

本論文では、1ML-LSMQ のための安定なマッチングを学生の正当と認められる不満が存在しない、つまり、タイプ I とタイプ III のブロッキングペアを含まないマッチングとする。そして、そのようなマッチングが必ず存在することを証明している。

提案アルゴリズム (Algorithm 1) の基本的なアイデアを示す。

- 正当と認められる不満を持たせないようにするため、ML の上位の学生から順に割当先を決定する。
- 各研究室 l_j に対して、下限と等しい p_j 個の通常枠と上限と下限の差と等しい $q_j - p_j$ 個の拡張枠を設定する。
- 研究室への下限以上の割当を保証するため、拡張枠に割当可能な学生の数を数えるカウンタを導入し、このカウンタが正である場合にのみ、拡張枠への割当を許す。

紙幅の都合上、詳細および証明は省略するが、Algorithm 1 の計算量は $O(|S| \cdot |L|)$ の多項式となっている。

Algorithm 1 Greedy

```

1: カウンタ  $c$  の値を  $n - \sum_{l_j \in L} p_j$  にセットする.
2: for 以下を学生  $s_1$  から  $s_n$  まで繰り返す. do
3:   学生  $s_i$  に関して、まだ拒否されていない  $s_i$  の選好で最上位の研究室を  $l_j$  とする.
4:   if  $l_j$  の現在の割当人数が  $p_j$  未満である. then
5:      $s_i$  を  $l_j$  に割り当てる.
6:   else if  $l_j$  の現在の割当人数が  $p_j$  以上かつ  $q_j$  未満であり、かつ  $c > 0$  である. then
7:      $s_i$  を  $l_j$  に割り当て、 $c$  の値を 1 減らす.
8:   else
9:      $s_i$  は  $l_j$  から拒否され、3 に戻る.
10:  end if
11: end for

```

また、このアルゴリズムが与えるマッチングは、タイプ I および III のブロッキングペアを含まないだけでなく、学生にとって戦略的操作不可能となっている。

4 おわりに

本論文では、(a) 正当と認められる不満 (justified envy) を持つ学生が存在しない、(b) 学生側の戦略的操作不可能性を満足するという性質をもつ 1ML-LSMQ を解く多項式時間アルゴリズム (Algorithm 1) を提案した。

Algorithm 1 は、2011 年度九州大学工学部電気情報工学科における研究室配属に実際に適用され、その結果、59.5% の学生が第 1 希望の研究室に配属され、第 5 希望の研究室までに割り当てられた学生は 126 人となり全体の 85.1% にも達した。また、タイプ II のブロッキングペアを持つ学生は 12 人となり、全体の 8% と非常に少ない数の学生のみがブロッキングペアに含まれることとなった。

また、今後の課題として、各研究室が ML に加えて独自の選好リストを持つ場合への拡張も考えられる。この拡張した問題において、正当と認められる不満を再定義し、それをもつ学生が存在しないアルゴリズムを開発している。

参考文献

- [1] M. Balinski and T. Sönmez. A tale of two mechanisms: Student placement. *Journal of Economic Theory*, 84(1):73–94, 1999.
- [2] K. Hamada, K. Iwama, and S. Miyazaki. The hospitals/residents problem with quota lower bounds. In *Match-Up: Matching Under Preferences. Algorithms and Complexity, Satellite workshop of International Colloquium on Automata, Languages and Programming*, pp. 55–66, 2008.