

## A-21 数値解析の高速化に向けた低次元化モデリングに関する基礎検討

清水 優吾\*, 新館 京平\*\*, 三目 直登\*\*\*, 武居 周\*

(\*宮崎大学工学部, \*\*筑波大学システム情報工学研究群, \*\*\*筑波大学システム情報系)

## 1 はじめに

有限要素法等の数値解析において、大規模な問題を扱う際の計算時間は実用上大きな課題となる。この解決策として、高自由度モデルを小数の基底で近似し、計算規模を削減する縮約モデル (Reduced Order Model) が注目されている。新館ら[1]は、縮約モデルの基底抽出手法の一種である POD(Proper Orthogonal Decomposition) に領域分割法を組み合わせて、各領域でそれぞれ基底を求める L-POD(Local POD) に関する研究を進めてきた。L-POD は計算効率や精度が領域分割に依存するため、適切な分割方法が重要となる。そこで本研究では、先行研究[1]のソルバを拡張し、解析対象の物理現象の特性に応じて領域を適応的に分割する機能の実装を行う。これにより、物理量の変化が大きい領域を細分化して基底を重点的に配置し、全体として少ない自由度で高精度な近似の実現を目指す。

## 2 基礎理論

## 2.1 縮約モデルの定式化

本研究では、非定常拡散方程式を対象に、SnapshotPOD および POD-Galerkin 法に基づき縮約モデルの構築を行う[1]。有限要素分割により次の高自由度の連立一次方程式(1)が導かれる。

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  は係数行列、 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  は解ベクトル、 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  は既知ベクトル、 $n$  は自由度数である。

まず、高自由度の解析から Snapshot として各時刻 ( $t = 1, \dots, N_s$ ) における解ベクトル  $\mathbf{u}^{(t)} \in \mathbb{R}^n$  を収集する。ここで  $N_s$  は取得した Snapshot の総数を表す。次にこれらをまとめて、Snapshot 行列  $\mathbf{S}$  (2) を構築する。

$$\mathbf{S} = [\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}^{(N_s)}] \in \mathbb{R}^{n \times N_s} \quad (2)$$

この行列(2)に特異値分解を適用し、得られた左特異ベクトルから支配的なものを  $r$  列抽出し、POD 基底  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times r}$  を構築する。ここで通常  $r \ll n$  である。

POD 基底  $\mathbf{V}$  により、解ベクトル  $\mathbf{u}$  は低次元化された未知ベクトル  $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^r$  を用いて  $\mathbf{u} \approx \mathbf{V}\tilde{\mathbf{u}}$  のように近似される。これを元の方程式(1)に代入し、Galerkin 射影を行うことで、 $r$  次元の縮約モデル(3)を構築する。

$$\mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{V}^T \mathbf{b} \quad (3)$$

## 2.2 L-POD

大域的な POD は領域全体で共通の基底を用いるため、局所的に複雑な振る舞いを捉えるには多くの基底を要する。一方、L-POD は領域分割法[2]により解析領域を複数の領域に分割し、各領域で独立に POD を実行する手法である。これにより各基底が局所的な現象を、より少ない基底で効率的に表現できる。

## 3 実装内容

本研究で用いる領域分割ライブラリ[3]は、有限要素メ

ッシュをグラフ構造として扱う。各節点をグラフのノードとし、領域分割は各領域に含まれるノードの重みの総和が均等となるように行われる。

物理現象の特性に応じて分割領域を適応的に決定するため、グラフの各ノード  $i$  に重み  $w_i$  を付与する。重みには複雑さの指標として物理量の時間変動の大きさを採用し、収集した Snapshot に基づき次式(4)で定義する。

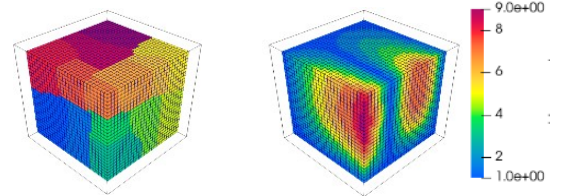
$$w_i = 1 + \alpha \sum_{t=1}^{N_s-1} \left| \frac{u_i^{(t+1)} - u_i^{(t)}}{\Delta t} \right| \quad (4)$$

ここで、 $u_i^t$  はノード  $i$  における時刻  $t$  での物理量、 $\Delta t$  は Snapshot の時間刻み幅、 $\alpha$  は重みの影響度を調整する任意のパラメーターである。

式(4)により計算した重みは物理量の時間的な変動が激しいノードほど大きな値となる。そのため、重みの大きいノードが密集する領域、すなわち高い空間解像度が必要な領域が、より小さな領域として分割されることになる。

## 4 数値実験

非定常拡散方程式に対して数値実験を行った。 $\alpha$  を 0.1、分割数を 16 とした場合の領域分割結果を図 1(a) に、重みの可視化結果を図 1(b) にそれぞれ示す。これらより、物理量変化の激しい領域が適応的に小さく分割されている様子が確認できる。手法の定量的な評価については講演にて報告する。



(a) 適応的な領域分割結果 (b) 重みの空間分布

図1 非定常拡散方程式に対する数値実験結果

## 5 まとめ

本研究では、L-POD の高性能化に向けて、物理量の時間変動を指標とした適応的な領域分割を実装した。数値実験により、実装手法が物理現象を考慮しない均等分割と比較し、計算精度の改善が期待できることを示した。

## 参考文献

- [1] 新館京平, 森田直樹, 金子栄樹, 三目直登. 分散メモリ型並列計算機に対する階層型低次元化モデリング, 日本計算工学会論文集, Vol. 2025, p. 20251001, 2025.
- [2] 武居周, 工藤彰. 並列有限要素法に基づく1億自由度超の波動音響解析, 日本シミュレーション学会論文誌, Vol. 12, No. 2, pp. 76-84, 2020.
- [3] 森田直樹, 集路幸正, 田中克治, 馬込望, 新館京平, 柴沼一樹, 三目直登. 領域分割型並列シミュレーションのためのグラフ構造に基づく統一的ライブラリと多手法への展開. 日本計算工学会論文集, vol. 2024, p. 20241008, 2024.