

木村 達平 常田 明夫  
(熊本大学大学院自然科学教育部)

## 1 はじめに

ランダムウォークは、数学や計算機科学など様々な分野で研究がなされており、現在では推薦システム、コンピュータビジョン、探索問題などに応用されている [1]. 本研究では、カオス 2 値系列を用いて 1 次元ランダムウォークを生成し、1 次元ランダムウォークの性質の一つである正側滞在時間が、確率の違いや相関の有無によってどのような影響を受けるかについて、理論的及び実験的に検討を行う.

## 2 ランダムウォーク

### 2.1 1次元ランダムウォークとは

ランダムウォークは次に現れる位置が確率的に無作為に決められる運動のことを指し、本研究で扱う 1 次元ランダムウォークは、+1 の確率が  $p$ 、-1 の確率が  $1-p$  で表される 2 値系列  $b_n \in \{-1, 1\}$  を用いて、正方向または負方向に移動する 1 次元ランダムウォークを扱う.

### 2.2 マルコフ性を持つランダムウォーク

無相関なランダムウォークとは次の結果が前回の結果に依存しないような無記憶情報源に基づいた動きであり、相関のあるランダムウォークとは図 1 で示されるようなマルコフ情報源に基づいた動きである.  $p_1$  と  $p_2$  の値によってランダムウォークが相関を持つか持たないか、また正の相関か負の相関かが決定する.  $p_1 + p_2 = 1$  の場合は無相関 (無記憶)、 $p_1 + p_2 < 1$  のときは正相関、 $p_1 + p_2 > 1$  のときは負相関となる. また、+1 の定常確率は  $p = p_1 / (p_1 + p_2)$  である.

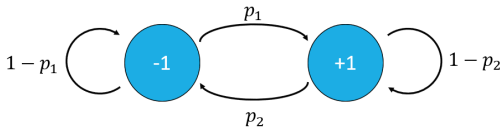


図 1: 2 状態単純マルコフ遷移図

### 2.3 正側滞在時間

正側滞在時間とは、ランダムウォークの過程で数直線上の正の領域にどれくらいの時間滞在していたかを表すものであり、1 次元ランダムウォークの特徴量の一つである [2]. 本研究では、相関や  $p$  (+1 の確率) によって正側滞在時間がどのように変化するかを実験する. 通常、 $p = 0.5$  の無相関ランダムウォークの場合、正側滞在時間の極限分布は式 (1) で与えられ、逆正弦法則と呼ばれる [2].

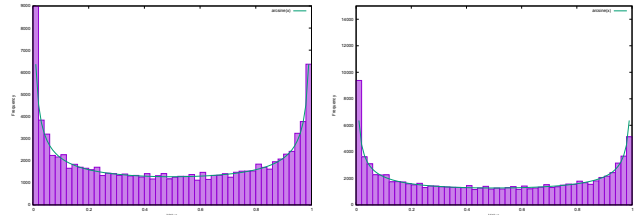
$$A(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \quad (1)$$

## 3 カオス 2 値系列

カオス写像  $\tau(x)$  を用いた 1 次元非線形差分方程式

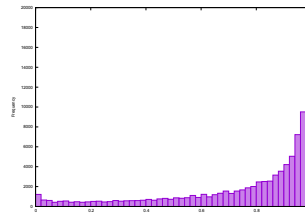
$$x_{n+1} = \tau(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

により、カオス実数値系列  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  が生成可能であり、さらにこれを 2 値関数  $B(x)$  を用いてカオス 2 値系列  $\{B(x_n)\}_{n=0}^{\infty}$  が生成できる. 区分線形写像と閾値関数により、無記憶情報源やマルコフ情報源と等価な 2 値系列が生成できることが知られており [3], 本研究のランダムウォークに利用する.

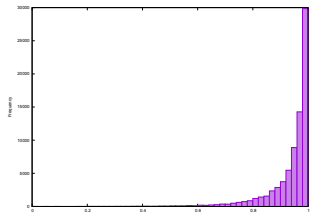


(a)  $p = 0.5$ , 無相関

(b)  $p = 0.5$ , 強い正相関

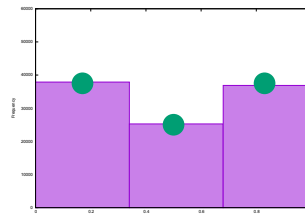


(c)  $p = 0.52$ , 無相関

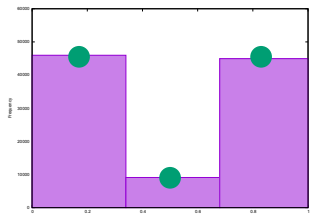


(d)  $p = 0.52$ , 強い負相関

図 2: 1,000 ステップの正側滞在時間の分布



(a)  $p = 0.5$ , 無相関



(b)  $p = 0.5$ , 強い負相関

図 3: 4 ステップの正側滞在時間の分布

## 4 実験結果と検討

図 2(a)(b) に  $p = 0.5$  で無相関の場合と強い正相関の場合の正側滞在時間の分布を示す. いずれも式 (1) の  $A(x)$  (緑線) にほぼ一致していることが確認できる. これは強い負の相関でも同様であった. また、図 2(c)(d) に  $p = 0.52$  で無相関の場合と強い負相関の場合の分布を示す.  $p > 0.5$  の場合の分布は 1 付近に偏り、負の相関が強くなるとその偏りが大きくなることがわかった. 逆に正の相関を強くすると分布は式 (1) の  $A(x)$  に近づくことが確認できた.  $p < 0.5$  では分布は 0 付近に偏るが、相関の影響は同様であった.

次に、ランダムウォークの初めの部分の動きを見るため、ステップ数を 4 にしたランダムウォークの正側滞在時間を調べた. 図 3 に  $p = 0.5$  で無相関の場合と強い負相関の場合の分布を示す. ここで緑点は理論値である. 1,000 ステップのときと異なり、 $p = 0.5$  でも相関の影響を受けていることが確認できる.

### 参考文献

- [1] F. Xia, J. Liu, H. Nie, Y. Fu, L. Wan, and X. Kong, "Random Walks: A Review of Algorithms and Applications," IEEE Trans. Emerg. Top. Comput. Intell., vol.4, no.2, pp.95–107, Apr. 2020.
- [2] 竹居正登, 入門 確率過程, 森北出版, 2020.
- [3] A. Tsuneda, Design of Binary Sequences With Tunable Exponential Autocorrelations and Run Statistics Based on One-Dimensional Chaotic Maps, IEEE Trans. CAS-I, vol.52, no.2, pp.454–462, 2005.