

M 推定と全最小二乗法を用いた ロバスト動的モード分解

若山 裕輝[†] 福永 修一[†]

[†] 東京都立産業技術高等専門学校ものづくり工学科電子情報工学コース

1. はじめに

動的モード分解(DMD)は動的システムを解析する手法であり、流体力学を中心として様々な分野へ応用されている。DMD の解は最小二乗法を用いて求めることができる。最小二乗法は外れ値の影響を強く受けるため、データに外れ値やノイズが含まれる場合には推定の精度が大きく下がる。この問題の解決を目指した方法として M 推定を用いた DMD である Robust DMD(RDMD)[1] が提案された。この方法は外れ値の除去は行えるが、ノイズに弱い手法となっている。

ノイズを除去する DMD として全最小二乗法の考えを取り入れた Total DMD(TDMD)[2]が提案されている。本研究はこの方法と RDMD を組み合わせることにより、外れ値とノイズを除去する DMD を提案する。そして数値例を用いて提案手法の有効性を示す。

2. Robust DMD

DMD は、データセット $Y_0 = [y_0, \dots, y_{N-1}]$ および $Y_1 = [y_1, \dots, y_N]$ から、以下で表せるような行列 A を推定する。

$$Y_1 = AY_0 \quad (1)$$

RDMD は、M 推定により外れ値を除去する。M 推定に基づいて行列 A を推定すると、推定値 \hat{A} は以下の重み付き最小二乗解として表すことができる。

$$\hat{A}^{(v+1)} = Y_1 Q^{(v)} Y_0^T (Y_0 Q^{(v)} Y_0^T)^{-1}$$

ここで $Q^{(v)}$ は重み行列であり、外れ値の影響を抑える効果がある。

3. Total DMD

TDMD は入力と出力両方の誤差を最小化する全最小二乗法を解く。全最小二乗法の解は、特異値分解によって求めることができる。

TDMD のアルゴリズムでは、ノイズ除去のために行列 $Z = [Y_0^T Y_1^T]^T$ を特異値分解する。そして特異値分解の結果より得られた右特異ベクトルを用いて Y_0, Y_1 からノイズを除去する。

4. 提案手法

提案手法は 2 つのステップから構成されている。1 つ目のステップでは全最小二乗法を用いてノイズを除去する。まず $Z' = [Y_0^T \dots Y_m^T]^T$ を特異値分解する。ここで、 $Y_i = [y_i, \dots, y_{N-m+1}]$ である。ただし次元削減することを考慮して Z ではなく Z' を用いていることに注意する。つぎに右特異ベクトルを用いて Y_0 からノイズを除去したもの

を $Y' = [y'_0, \dots, y'_{N'}]$ とする。ノイズが除去され外れ値の残った Y' から新たなデータセット $Y'_0 = [y'_0, \dots, y'_{N'-1}]$ および $Y'_1 = [y'_1, \dots, y'_{N'}]$ を作成する。2 つ目のステップでは M 推定に基づき外れ値を除去する。 Y'_0, Y'_1 から重み付き最小二乗法を用いて A を推定する。

5. 数値例

以下の式で表される線形動的システムについて推定を行う。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - 3x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 \end{aligned} \quad (2)$$

このシステムに対して $t = 1.00 \sim 1.05, 2.00 \sim 2.05$ で $+0.3$ の外れ値が入る場合と、平均が 0 で分散が 0.01 のガウスノイズが入る場合の 2 つのシミュレーションを行う。また、初期値は $x_1(0) = 0.3, x_2(0) = 0.3$ とした。以上の条件のもとで、 x_2 の推定結果を図 1 および図 2 に示す。それぞれ横軸が時間、縦軸が推定値である。

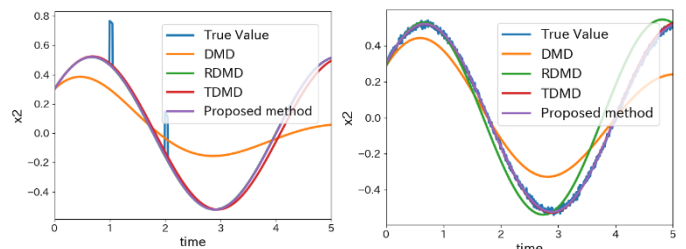


図 1. 外れ値を付与されたデータの推定結果

図 2. ノイズを付与されたデータの推定結果

図 1 および図 2 より、RDMD はノイズを付与されたデータで、TDMD は外れ値を付与されたデータで推定精度が低い。一方で、提案手法はどちらのデータでも高い推定精度を持つことがわかる。

6. まとめ

本研究では、M 推定と全最小二乗法を用いた外れ値に対してロバストな DMD を提案した。そして提案手法は、外れ値が乗ったデータとノイズが乗ったデータどちらに対しても高い推定精度を持つことを示した。

最後に本研究は JSPS 科研費 21K03885 の助成を受けたものであり、ここに感謝の意を表します。

参考文献

- [1] A. H. Abolmasoumi, M. Netto, and L. Mili. Robust dynamic mode decomposition. arXiv:2105.09869, May 2021.
- [2] M. S. Hemati, C. W. Rowley, E. A. Deem, and L. N. Cattafesta. De-biasing the dynamic mode decomposition for applied Koopman spectral analysis of noisy datasets. Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 31(4), 349-368, 2017.