グラフ上のダイヤモンドゲームの計算複雑さ

山田　貴之　　　武永　康彦
電気通信大学大学院 情報理工学研究科

1. はじめに

計算理論の分野において，様々なパズルやゲームの計算複雑さが研究されている．本稿では，ダイヤモンドゲームと呼ばれるボードゲームをグラフ上で行う二人用ゲームに一般化し，必勝性判定問題の EXPTIME 完全性を示す．

2. ダイヤモンドゲーム

このゲームは一般的には 2～3 人で行われる．ゲームは各プレイヤーが自分のすべての駒をそれぞれの陣地に配置した状態から始まる．各プレイヤーは交互に 1 回ずつ駒を動かし，先に自分のすべての駒をそれぞれの目標まで移動させたプレイヤーが勝利となる．駒の動かし方は，隣の節点へ移動するか，もしくは隣の節点にある駒を直線的に飛び越して移動するかの 2 通りの方法が可能である．なお，飛び越しを行った後に再び別の駒を飛び越すことも可能で，これらの手数はまとめて 1 手と数える．他のプレイヤーの陣地，目標に入ることや．1 回の動作の間に一度通過した経路を引き返すことはできない．なお一般化では，直線でなくとも辺があれば飛び越しは行えるものとする．

3. EXPTIME 完全性

既に必勝性判定問題が EXPTIME 完全であることが示されている二人用論理式ゲーム G3[1]からの帰着を用いて次の定理が成り立つことを証明する．

<u>**定理 1.** 一般化二人用ダイヤモンドゲームの先手必勝問題は EXPTIME 完全である．</u>

G3 は入力として，論理変数の集合$A = \{a_1, a_2, \dots, a_s\}, B = \{b_1, b_2, \dots, b_t\}$ と，論理関数 $AWIN = A_1 \lor A_2 \lor \dots \lor A_m, BWIN = B_1 \lor B_2 \lor \dots \lor B_n$ が与えられ，A, Bに属する変数は 1 か 0 の値をもっている．G3 のプレイヤーは交互に先手はA，後手はBの変数のうち 1 つの値を反転させる．$A(B)$が手番のときに$AWIN(BWIN)$が真であれば$A(B)$の勝利となる．

G3 をシミュレートするグラフ上のダイヤモンドゲームを図 1 のように構成する．構成は論理部，妨害部，目標集合部に分かれる．図 2 は，変数がa_1のみの項に対応する論理部の一部の例を示す．論理部でプレイヤーは赤枠内の駒を左右に動かすことで自分の変数の値を変えられる.図 2 のように黒が$AWIN$を満たしていれば，黒主要駒を X に移動し次の 1 手で黒 G へ移動できる．プレイヤーは，G3 で勝利する場合に限り，論理部にある1つの駒を相手より先に G へ移動できる．妨害部は，先に駒を G へ移動させたプレイヤーが，そうでないプレイヤーの駒の移動を妨害できる構成になっている．それにより相手は一部の駒を目標へ移動できなくなるため，先に駒を G へ移動させたプレイヤーがダイヤモンドゲームで勝利する．

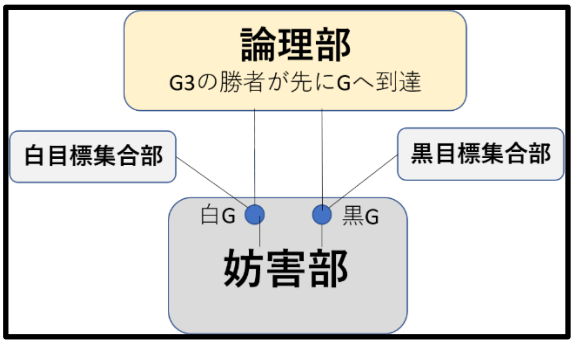

図 1：構成全体

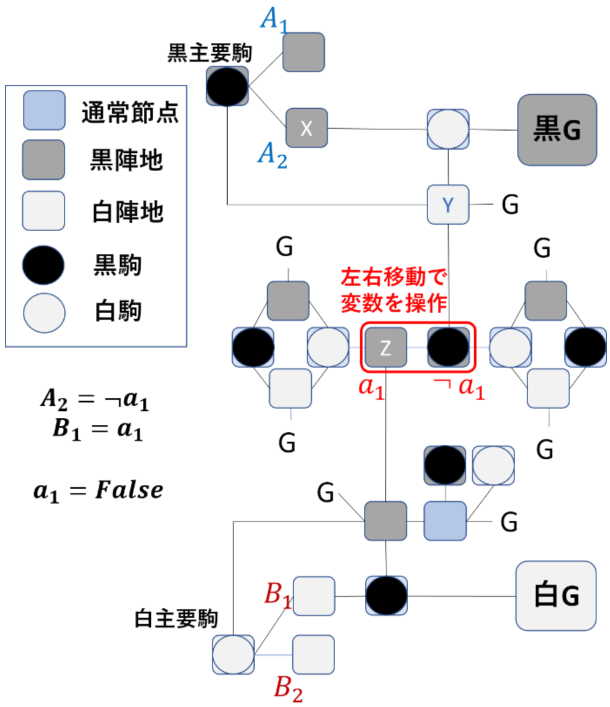

図 2：論理部の例

参考文献

[1] L. J. Sttockmeyer, A. K. Chandra: “Provably difficult combinatorial games,” SIAM J. Comput., 8, No.2, pp.151–174, 1979.

Copyright © 2022 IEICE