

三人一般化七並べの必勝性

田中 天希[†] 武永 康彦[†]

[†]電気通信大学大学院情報理工学研究科

1. はじめに

七並べは、日本では有名な多人数で行われる不完全情報ゲームである。これまでに、カードの枚数を一般化した一般化七並べにおけるスート数2の場合の最適な戦略についての研究[1,2]や、木谷らによるグラフ的一般化による計算量の解析[3]が行われている。本研究では、プレイヤー数が3人かつ相手の持つカードは枚数のみわかっている場合の一般化七並べにおいて、スート数が1と2の場合の必勝条件と最下位にならない条件を求める。

2. 三人一般化七並べ

まず一般化七並べの定義を行う。カードは合計で n 枚とし、それぞれがスートと値の2つの要素を持つ。値は1から各スートの最大値まで存在し、各スートに対して同じ値のものは1枚のみである。スート列をA,Bと呼び、それぞれのスートに属すカードの値の最大値は p, q とする。プレイヤーをX,Y,Zとし、それぞれは x, y, z 枚の手札を持つ。

プレイヤーは順に自身の手番をプレーする。自身の手番では、カードを出すか、出せない場合のみパスをする。出せるカードは、各スートでまだ場に出ていないカードのうち値の最大のものである。パスに回数制限は存在しないが、出せるカードが無い時にのみ使用できる。最初に手札を全て出し終えたプレイヤーが勝利となる。

三人一般化七並べでは、相手2人が持つカードは枚数のみわかり、それがどのようなカードであっても必勝となる、または最下位にならない条件を考える。

3. スート数1の場合

本研究ではスート数が1と2の場合についての必勝となる条件及び最下位にならない条件を求める。

定理1 Xが持つ手札のうち、最弱のカードがそのスートの最弱のカードでない場合、かつその場合に限りXは最下位にならない。

定理2 Xが持つ最弱のカードより強い相手のカードの枚数を a_s 枚とする。関係 $a_s < \min(y, z)$ が成り立つ場合、またその場合に限りXは必勝である。

証明の概要 Xが持つ最弱のカードより強い相手のカードの枚数の合計がYとZの手札の枚数のいずれよりも少なければ必勝である。□

4. スート数2の場合

各スートA,Bにおいて、Xの手札のうち最弱のカードよりも弱いカードがある区間をそれぞれ A_w, B_w とし、同様にXの手札のうち最弱のカードより強いカードがある区間をそれぞれ A_s, B_s とする。それぞれの区間にあるX以外のプレイヤーのカードの枚数を a_w, b_w, a_s, b_s 枚とする。あるスートにXのカードが1枚も存在しなければ、そのスートのカードは全て区間 A_w または B_w にあるとする。

また、まだ出されていないカードのうちプレイヤーXのカードが連続して並んでいる部分と、X以外のカードが連続して並んでいる部分をそれぞれXの連続、Y,Zの連続と呼ぶ。Y,Zの連続は、YのカードとZのカードが並んでいる部

分もY,Zの連続とする。連続を為すカードを出して連続の数が1つ減ることを連続を消費と呼ぶ。

定理3

- $a_w > 0$ かつ $b_w > 0$ の場合、Xは最下位にならない。
- $a_w > 0$ かつ $b_w = 0$ の場合、
 $b_s \leq (a_s \text{にあるXの連続})$ ならばXは最下位にならない。
- $a_w = 0$ かつ $b_w > 0$ の場合

$a_s \leq (b_s \text{にあるXの連続})$ ならばXは最下位にならない。

証明の概要 両スートとも最後のカードがXのカードで無い1の場合は、明らかにXは最下位にならない。

一方のスートの最弱のカードがXのカードである場合分け2,3の場合は、そのカードを他方のスートの最弱のXのカードよりも先に出せばXが最下位にならないことを示した。□

補題1 関係 $\max(a_w, b_w) > \max(y, z)$ が成立するとき、またその時に限り、 A_w, B_w のうち枚数の多い方の区間にYとZの手札がそれぞれ1枚以上存在する。

これが成立しないとYまたはZの手札が全てXの持つ最弱のカードより強い可能性がある。

定理4 $a_w > b_w, y \geq z$ と仮定する。 A_s にあるXの連続の数を i 、 B_s にあるY,Zの連続の数を j とする。

- スートAにXのカードが無い場合、($b_s = 0$ かつ $x < z$) または($b_s = 0$ かつ $x = z$ かつXがYより先にプレーする)を満たす時、またその時に限りXは必勝である。
- スートAにXのカードがある場合、 $a_w > y$ かつ

- $b_s = 0$
- $i > j$
- $i = j$ かつXがZより先にプレーする

のうち少なくとも1つが成立するとき、またそのときに限りXは必勝である。

証明の概要 1の場合、 A_w にZの手札が全て存在し得るので、それが全て出される前にXが手札を出し終えることが出来ることを示した。

2または3の場合、 $a_w > y$ が成立すると、補題1より A_w にYとZのカードがそれぞれ1枚以上存在する。従って、条件を満たしていればスートBのXが持つ最弱のカードをスートAのXが持つ最弱のカードよりも先に出せることを示した。□

4. 今後の課題

更に人数が増えた場合や、スート数が増えた場合についての研究が課題となる。

参考文献

- 深川大路, “後退解析を用いた完全情報七並べの解析,” 組合せゲーム・パズルミニプロジェクト第7回ミニ研究集会(2012).
- 田中天希, 武永康彦, “二人一般化七並べの戦略,” 電子情報通信学会総合大会学生ポスターセッション, ISS-P-027(2020).
- 木谷裕紀, 末續鴻輝, 小野廣隆, “七並べのグラフ的一般化と必勝判定,” 電子情報通信学会総合大会, DS-1-4(2021).