グラフ上のペグソリティアの計算困難性

伊藤　和司　　　武永　康彦
電気通信大学大学院情報理工学研究科

1. はじめに

ペグソリティアとは盤上のペグを定められたルールで取り除いていき１個にするパズルである。ペグが直線上に並んでいてかつその隣にペグがないとき、ペグは他のペグを飛び越えることができ、飛び越えられたペグを盤から取り除く(図 1)。これをもとにグラフ上のペグソリティアが考案され、研究が行われている[1]など。本研究ではこのグラフ上のペグソリティアにおいて、グラフと初期状態で空となる１個の頂点が与えられたときペグを一つにできるか否かという問題が NP 完全であることを証明した。

図 1. ペグの飛びこし

2. グラフ上のペグソリティアの可解性判定問題

グラフ上のペグソリティアにおいて、入力(V, E, s)(V は頂点の集合、E は辺の集合、$s \in V$ は空の頂点)が与えられたとき、ペグを一つにすることができるかどうかという問題をグラフ上のペグソリティアの可解性判定問題という。

定理　グラフ上のペグソリティアの可解性判定問題は NP 完全である。

略証　次数が3の頂点のみの平面有向グラフのハミルトン閉路問題は NP 完全であることが知られている[2]。このハミルトン閉路問題からグラフ上のペグソリティアの可解性判定問題への多項式時間帰着をおこなうことで NP 完全である事を示す。

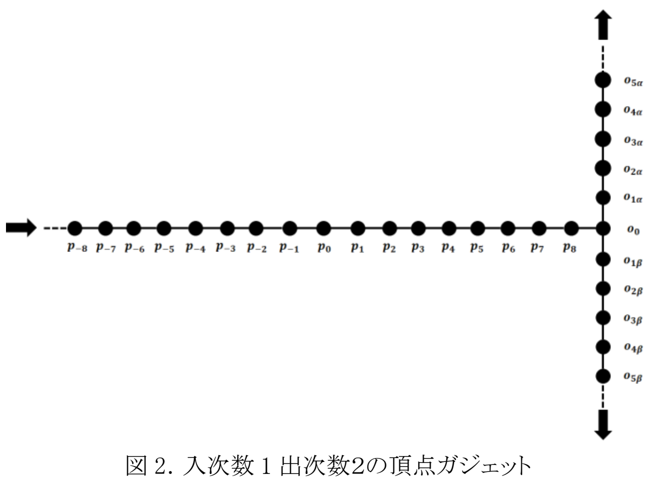

図 2. 入次数 1 出次数2の頂点ガジェット

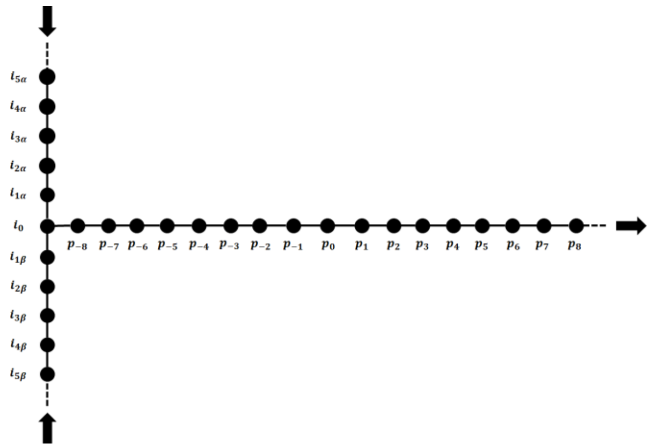

図 3. 入次数 2 出次数 1 の頂点ガジェット

入次数 1 出次数 2 の頂点を表すガジェットを図 2、入次数 2 出次数 1 の頂点を表すガジェットを図 3 に示す。始めの空の頂点を任意の入次数 1 出次数 2 の頂点ガジェットの p_0 の頂点とする。これらのガジェットを直接つないでグラフを構成する。

ハミルトン閉路が存在するとき、閉路上の頂点にあたるガジェットのペグを順に消していくことで最終的にペグを一つにすることができる。

ハミルトン閉路が存在しないとき、閉路上の頂点のペグを順に消していく際二手に分岐してペグを消していくことができないこと、一部のみ有向辺の逆向きにペグを消していくとペグを一つにできないこと、グラフに存在する閉路上のペグを消していく際、閉路上にない頂点ガジェットのペグをすべて消すことはできないことを順に示し、ペグを一つにすることができないと証明した。

3. 今後の課題

本研究で証明した問題は始めの空の頂点が与えられているため、任意の頂点を空にしたときペグを一つにできるか否かという問題の計算複雑さはまだ証明できていない。これを明らかにすることが今後の課題である。

謝辞　本研究は JSPS 科研費 18K11601 の助成を受けたものです。

参考文献

[1] Robert A. Beeler D. Paul Holiman, Peg Solitair On Graphs, Discrete Mathematics 311(2011) 2198-2202.

[2] J. Plesnik, The NP-completeness of the hamiltonian cycle problem in planar digraphs with degree bound two, information processing letters, 8, 4, (1979)199-202.