ハイパーキューブの距離２支配数

青木　優志†　　河村　奈々††　　菊地　洋右†
† 津山工業高等専門学校総合理工学科　　†† 奈良先端科学技術大学院大学先端科学技術研究科

1. はじめに

ハイパーキューブ Q_n とは頂点集合が n 桁の 2 進数であり、2 頂点のハミング距離が 1 のとき、かつそのときに限りその 2 頂点が隣接するグラフである。ハイパーキューブはグラフ理論，符号理論，ネットワークのモデルという観点から研究されてきた。グラフの支配数を決定する問題は NP 困難であることが知られている。本研究ではハイパーキューブの距離2支配数と距離2全支配数について検討する。

2. 定義と用語

グラフ G の頂点集合を $V(G)$，辺集合を $E(G)$ であらわす。$S\subset V(G)$ について $V(G)\setminus S$ の任意の頂点 v に対し、ある $u \in S$ が存在し、$(u,v)\in E(G)$ であるとき，S は G の支配集合である。グラフ G の支配集合で最小濃度であるものを $\mathrm{dom}(G)$ であらわし，$\mathrm{dom}(G)$ の濃度を $\gamma(G)$ であらわし、G の支配数とよぶ. $S\subset V(G)$ について G の任意の頂点 v に対し、ある $u \in S$ が存在し、$(u,v)\in E(G)$ であるとき，S は G の全支配集合である. グラフ G の全支配集合で最小濃度であるものを $\mathrm{dom}_t(G)$ であらわし，$\mathrm{dom}_t(G)$ の濃度を $\gamma_t(G)$ であらわし、G の全支配数とよぶ.

支配数を拡張したものに距離 k 支配数がある。ハイパーキューブ Q_n の距離 k 支配集合 S は $S\subset V(Q_n)$ であり、$V(Q_n)\setminus S$ の任意の頂点 v に対し、ある $u \in S$ が存在し、u と v のハミング距離が k 以下であるとき，S は Q_n の距離 k 支配集合であると定義される。Q_n の距離 k 支配集合で最小濃度であるものを $\mathrm{dom}^k(Q_n)$ であらわす。$\mathrm{dom}^k(Q_n)$ の濃度を $\gamma^k(Q_n)$ であらわし、Q_n の距離 k 支配数とよぶ. Q_n の距離 k 全支配数も同様に定義されている。Q_n の距離 k 全支配集合を $\mathrm{dom}_t^k(Q_n)$ で、γ 距離 k 全支配数を $\gamma_t^k(Q_n)$ であらわす。

3. 既存研究

Harary らの論文と Östergård らの研究からハイパーキューブの支配数について表 1 のような結果が知られている[1],[3]。

表 1 ハイパーキューブの支配数について知られている結果

n	1	2	3	4	5	6
$\gamma(Q_n)$	1	2	2	4	7	12
n	7	8	9	10	$2k-1$	$2k$
$\gamma(Q_n)$	16	32	62	107-120	$2n-k$	$2n-k$

ハイパーキューブの距離 2 支配数については河村らによって表 2 のような結果が得られている。ただし、河村らの距離 2 全支配数については間違いがあるので、修正したものが表 2 である。

表 2 ハイパーキューブの距離 2 支配数と距離 2 全支配数について知られている結果

n	1	2	3	4	5	6	7
$\gamma^2(Q_n)$	1	1	2	2	2	4	7
$\gamma_t^2(Q_n)$	2	2	2	2	4	4	8

3. 本研究の方向性と今まででわかっていること

河村らは距離 2 支配数を求めるために整数計画法で定式化して求めている。本研究でも同じ方法を用いることにする。計算機で得られた結果として $\gamma^2(Q_8)=\gamma_t^2(Q_8)=12$ であることが分かった。実際の支配集合は $\mathrm{dom}^2(Q_8)=\mathrm{dom}_t^2(Q_8)$ ={00001000,00011000,00110111,01001101,01110011,01110110,10011000,10100011,10100110,11001101,11011101,11100010}が得られた。

5. まとめと今後の課題

ハイパーキューブに対して n=8 の場合の距離 2 支配数と距離 2 全支配数を求めることができた。今後は n=9 の場合や一般の n の場合について研究したいと考えている。また、k=2 の場合を現在は扱っているがこれについても一般の k に対して研究したいと考えている。

参考文献

[1] F. Harary and M. Livingston, Independent domination in hypercubes, Appl. Math. Lett., 6, 27-28, (1993).
[2] 河村奈々, 菊地洋右, ハイパーキューブの距離 2 支配数について, 信学技報, 118, COMP2018-42, 69-72, (2018).
[3] P. R. J. Östergård and U. Blass, On the size of optimal binary codes of length 9 and covering radius 1, IEEE Trans. Info. Theory, 47, 2556-2557, (2001).