

格子状グラフ上の方向のみ認識可能な Cops and Robbers の必勝性

大久保 辰哉[†]

武永 康彦^{††}

[†] 電気通信大学情報理工学部

^{††} 電気通信大学大学院情報理工学研究科

1. はじめに

Cops and Robbers はグラフ上で行われるゲームである。2 人のプレイヤーは警官(Cops)と泥棒(Robbers)にわかれる。警官は泥棒の位置する頂点に到達して逮捕すること、泥棒は警官から逃げ続けることが目的である。このゲームに関して一般的なルールにおける研究や変種のルールの研究が多くされている[1]。本研究では、警官に泥棒への最短経路の方向のみ認識可能であるという制約を加えた変種のルールで、格子状のグラフ上での必勝性について研究を行う。

2. Cops and Robbers のルール

2.1 一般的なルール まず、警官プレイヤー、泥棒プレイヤーの順にそれぞれ警官、泥棒を配置する頂点を決定する。以降は警官、泥棒が交互に、隣接する頂点に移動するか留まるかの動作を行う。警官、泥棒は互いの位置する頂点を常に認識でき、泥棒の頂点と警官の頂点の1つが一致したとき、警官の勝利となる。泥棒はこれを永続的に回避し続けられれば勝利となる。

2.2 本研究でのルール 一般的なルールに警官のみ泥棒の位置する頂点を認識できないという制約を加える。ただし、警官は警官のターン開始時に、警官の頂点から泥棒の頂点への最短経路に含まれ警官の頂点に隣接する頂点を認識できる。この頂点を最短経路方向と呼ぶことにする。認識できる最短経路方向に関して、すべて認識できるルールと、ランダムに選ばれた1つのみ認識できるルールの2つを考える。

後者のルールでは泥棒の動き方、認識できる最短経路方向に依らず、泥棒を捕まえられるような警官の動き方が存在するとき、警官が必勝であるとする。

3. すべての方向を認識できるルールでの必勝性

本研究では $\{(x, y) | 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq x\}$ の頂点集合に対し、次のような辺をもつグラフを n -三角格子グラフと呼ぶ。

$$\begin{aligned} \{(i, j), (i+1, j)\} & \quad (0 \leq i \leq n-1, i \leq j \leq n) \\ \{(i, j), (i, j+1)\} & \quad (1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq i-1) \\ \{(i, j), (i+1, j+1)\} & \quad (0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq i) \end{aligned}$$

定理 1 最短経路方向がすべて認識できるルールにおいて、 n -三角格子グラフ上では警官 1 人で必勝となる。

証明の概要 警官、泥棒の座標をそれぞれ (x_c, y_c) , (x_r, y_r) とする。まず、警官を $(\lfloor n/2 \rfloor, 0)$ に配置する。

次に、図 1 のように認知する最短経路方向に応じて x_r, x_c の大小関係が判別できる。警官はこの関係に

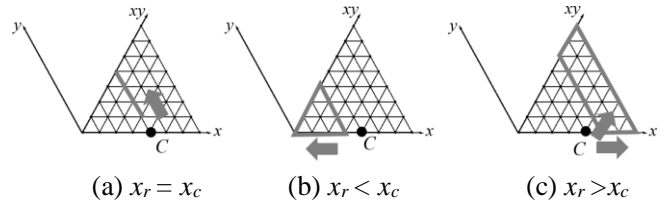


図1. x_r, x_c の関係による泥棒の位置する範囲

応じて移動することで、 $x_r = x_c$, $x_r = x_c + 1$, $x_r = x_c - 1$ のいずれかに特定できる。

x_r を特定した後の警官は x_r, x_c の関係に応じて、移動後に $x_r = x_c$ を満たし、可能であれば y 座標を近づけるように移動する。泥棒がどのように移動しても次の警官のターン開始時に $x_r = x_c$, $x_r = x_c + 1$, $x_r = x_c - 1$ のいずれかを満たす。これらの移動を繰り返すことで泥棒を捕まえられる。 □

4. 1つの方向を認識できるルールでの必勝性

定理 2 最短経路方向が 1 つのみ認識できるルールでは $n \geq 6$ において、 n -三角格子グラフ上では警官 1 人では必勝とならない。

証明の概要 図 2 の ● で示した頂点を外周の midpoint と呼ぶ。泥棒は警官と隣接するまで外周の midpoint にとどまる。

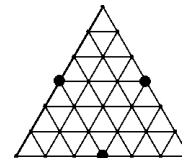


図2. n -三角格子グラフの外周の midpoint

警官が泥棒と隣接したときに、認識した最短経路方向に依っては警官がどのように動いても、泥棒が別の外周の midpoint に移動し再び警官と隣接するまで留まる状態か、特定の位置関係を繰り返すため警官は必勝とならない。 □

5. 今後の課題

今後は、格子状のグラフに限らず種々のグラフ上で、必勝となるために必要な警官の人数が一般的なルールとどれほど違うのか明らかにしたい。

参考文献

[1] A. Bonato, R.J. Nowakowki, The Game of Cops and Robbers on Graphs, American Mathematical Society (2011).

謝辞 本研究は JSPS 科研費 JP18K11601 の助成を受けたものです。