

魔方陣の数え上げに向けた分類写像とその性質について

山田 穂高[†] 山本 修身[‡]

[†] 名城大学理工学研究科情報工学専攻 [‡] 名城大学理工学部情報工学科

1 はじめに

本稿では $n \times n$ 魔方陣（これを n 次魔方陣と呼ぶ）の個数の数え上げについて考える。5 次までの魔方陣の個数は正確に知られている、6 次魔方陣については概数は確率的手法によって知られているが、正確な個数は知られていない。そこで、6 次魔方陣の厳密な個数の数え上げを目指して、効率的な n 次魔方陣の数え上げ手法について考える。ZDD (Zero-suppressed Decision Diagram) [1] を用いた厳密な個数の計算方法について考える。

2 魔方陣の定義

n 次魔方陣とは、0 から $n^2 - 1$ の整数を $n \times n$ の格子状に並べたもののうち、各行、列、対角線についての和が全て等しい配置のことである。ここで、この和のことを魔法和、全ての整数が使われている条件を順列条件、各和が魔法和に等しいという条件を魔方和条件と呼ぶ。

使用する計算機のメモリの量や計算量に制約がなければ、あらゆる魔方陣は ZDD で表現することができる。その ZDD が表現する解集合の個数を計算することで、魔方陣の総数を得ることができる。しかし 64GB のメモリが搭載されている PC 上で、この方法でうまくいくのは 4 次魔方陣までで、5 次以上の魔方陣についてはそのまま計算することは困難である。

そこで、本稿では魔方陣の総数を直接数え上げる ZDD を作成するのではなく、いくつかの類にまず類別し、それぞれの類内の魔方陣の個数を ZDD で計算して、合計することで魔方陣の総数を数え上げる。本稿では、適当な写像を用いて類を定義する。これを分類写像と呼ぶ。

3 分類写像

分類写像は魔方陣を分類するために用いる写像のことである。分類写像を用いた場合、魔方陣の総数は、各像から数え上げられる魔方陣の個数の合計によって求められる。本稿では、次の 4 種類の分類写像を考える。

- (i) m を法とする数字に置き換える分類写像
- (ii) m 個の連続した数字の集合に区分けして、それぞれの区分ごとに数字を割り当てる分類写像
- (iii) 特定の m 個の変数の数字により分類する分類写像
- (iv) 特定の m 個の数字がどの変数に存在するかにより分類する分類写像

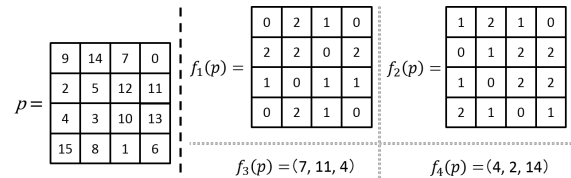


図 1: 左図の 4 次魔方陣に対する分類写像の像（左上: (i), 右上: (ii), 左下: (iii), 右下: (iv)）。

表 1: 6 次魔方陣を数え上げる際の最大ノード数、原像の個数および計算時間の平均。

m	最大ノード数	原像の個数	計算時間 [s]
8	2.8×10^7	1,919	548.721
9	5.1×10^6	304	42.248

図 1 の右図は、 $m = 3$ として、(ii) は 4 個 6 個 6 個と区分けし、(iii) と (iv) は特定の変数や数字を (2, 7, 8) とした場合の左図の魔方陣に対する各分類写像の像である。

本稿では像の個数が比較的少ない (i) の分類写像を用いて実験を行った。

4 分類写像 (i) を用いた結果と今後の課題

実験は、メモリ 64GB, CPU6-Core Intel Xeon \times 2 の MacPro を用い、言語処理系は Java version 1.8.0.05 を使用した。

6 次魔方陣に対しては $m = 8$ の分類写像から数え上げる ZDD を作成できた。そこで、6 次魔方陣に関しては $m = 8, 9$ の分類写像の像のうち、ランダムに選出した 100 個に対し、ZDD を作成する過程の最大ノード数と原像の個数の平均をまとめたものを表 1 に示す。しかし、像の個数はどちらも膨大で数え上げられておらず、概算として $m = 8$ の場合は 9.4×10^{15} 個、 $m = 9$ の場合は 5.9×10^{16} 個ほどであると計算される。よって表 1 から、分類写像 (i) を用いた場合、6 次魔方陣の総数を数え上げるには、膨大な時間がかかり、不可能である。

実験結果から、現段階の方法では現実的な時間で総数を計算することができないが、今後 (i) の分類写像以外の分類写像を用いた実験および、ZDD の作成方法の工夫が必要であると考えられる。

参考文献

- [1] Knuth, D. E.: *The Art of Computer Programming*. vol. 4, Fascicle 1, Generating Bitwise Tricks & Techniques, Binary Decision Diagrams. Addison-Wesley, Boston, 2005.