

置換+1e グラフの頂点彩色問題の計算複雑さ

三柴 勇太

武永 康彦

電気通信大学大学院 情報理工学研究科 情報・通信工学専攻

1. はじめに

頂点彩色問題とは与えられたグラフの隣接する頂点同士を異なる色になるように最小の色数で頂点を彩色する問題である。一般的なグラフに対して頂点彩色問題は NP 完全であるが、特定のグラフ族においては多項式時間で解ける場合がある。したがって、そのようなグラフ族に近いグラフ族に対しても多項式時間で解ける可能性がある。そのようなグラフ族に近いグラフを表す方法の一つとして、辺や頂点の追加または削除をパラメータとして与えるパラメータ化グラフが考えられている[1]。例えば、 $F+k_e$ グラフとは、グラフ族 F に属するグラフに高々 k 本の辺を加えたグラフである。追加あるいは削除した辺の集合をモジュレータという。

本研究では、置換+1e グラフにおいて、 $O(n^2 \log n)$ 時間で頂点彩色問題を解くアルゴリズムを提案する。

2. 置換グラフ

置換グラフはライン表現によって表される。ライン表現とは、頂点数を n とすると、上段は $(1, \dots, n)$ を昇順に並べたもの、下段は $(1, \dots, n)$ を置換したもの $(\pi(1), \dots, \pi(n))$ を並べ、同じ数字を直線で結んだものである。ライン表現において線と線が交差する場合、それらの頂点間に辺が存在することを意味する。ライン表現の下段の頂点の並びを permutation と呼ぶ。図1に permutation が $(4, 3, 5, 1, 2)$ のときの置換グラフとそのライン表現の例を示す。

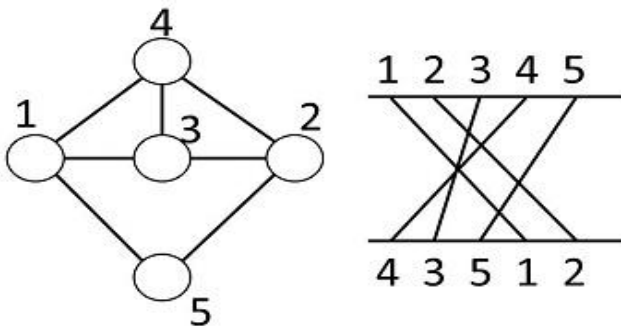


図 1: 置換グラフ(左)とライン表現(右)

3. 置換グラフの頂点彩色アルゴリズム

入力として permutation が与えられるものとする。ここで、 $\pi(i)$ をリストに入れる際、リスト内の最大頂点番号が $\pi(i)$ 未満のリストを挿入可能なリストと呼ぶ。

[アルゴリズム P][2]

$i=1$ から n まで以下を繰り返す。

$\pi(i)$ を二分探索を用いて、挿入可能なリストのうち、リスト中の最大頂点番号が最大のリストに入れる。挿入可能なリストがなければ、新たなリストを作成し、そこに挿入する。

アルゴリズム P で作成されたリスト内の頂点は互いに辺を持たないため同一の色で彩色可能である。使用したリストの数が彩色数になる。アルゴリズム P の計算時間は $O(n \log n)$ である。

4. 置換+1e グラフの頂点彩色アルゴリズム

入力として permutation とモジュレータ (u, v) が与えられるものとする。入力の permutation に対して、アルゴリズム P と同様にリストに頂点を入れ、 u と v が同じリストに入った場合は、 u と v は辺を持つので同一の色で彩色できない。したがって、 u と v を異なるリストに入れる必要がある。

[アルゴリズム P+1e]

step1. $\pi(1)$ から v まで頂点をアルゴリズム P と同様にリストに入れる。

step2. 頂点 u, v が異なるリストに存在する場合 step7 へ。

step3. 頂点 u, v がともにリスト i に入ったとする。リスト $i-1$ とリスト i の二部グラフを考え、 u, v が非連結ならば、リスト $i-1$ とリスト i の u と連結な頂点を入れ替え、step7 へ。

step4. リスト i とリスト $i+1$ の二部グラフを考え、 u とリスト $i+1$ の最大頂点が非連結の場合、リスト i とリスト $i+1$ の u と連結な頂点を入れ替え、step7 へ。

step5. リスト i 内の v を除く任意の頂点 $f(\geq u)$ に対し、リスト内の f 以下の頂点全てを含む頂点集合 U を列挙する。列挙した各 U に対して以下を繰り返す。

(i) U の頂点と辺を持ち、リスト i 内の f より後の頂点と辺を持たないリスト $i+1$ 内の頂点と U を入れ替える。

(ii) 番号 $i+1$ 以上のリストの頂点集合に対して再度リスト $i+1$ を始めとしてアルゴリズム P と同様に頂点を入れる。

(iii) $\pi(n)$ までアルゴリズム P と同様にリストに頂点を入れる。

step6. step5 で各 U に対して $\pi(n)$ まで入れた結果、最小のリスト数を出力し終了。

step7. $\pi(n)$ までアルゴリズム P と同様にリストに頂点を入れる。

step8. 使ったリスト数を出力し終了。

5. まとめ

本研究で置換+1e グラフの頂点彩色問題を計算時間 $O(n^2 \log n)$ 時間で解けることを示すことができた。

参考文献

[1] Leizhen Cai, "Parameterized complexity of vertex colouring," Discrete Applied Mathematics 127, pp.415-429, 2003.
 [2] Martin Chrls Golumbic, "Algorithmic graph theory and perfect graphs second edition," Elsevier, 2004.