# フロンティア法を用いた根無し木の列挙

吉田　隆史　　武永　康彦
電気通信大学大学院　情報理工学研究科

## 1.　はじめに

近年，ゼロサプレス型二分決定グラフ(ZDD)[1]を用いて与えられた問題の解集合を全列挙する技法であるフロンティア法が注目を集めている．フロンティア法は，解集合を表す ZDD をトップダウンに構築する技法である[2]．本研究では，フロンティア法を用いて非同型な根無し木を列挙するアルゴリズムを提案する．

## 2.　フロンティア法を用いた根無し木の列挙

### 2.1 概要

正整数 n が与えられたとき，頂点数が n の非同型なすべての根無し木を表現する ZDD を構築する．提案手法では，根無し木と一対一対応する標準形を定義し，標準形である全域木を表現する ZDD を構築することによって，同型な木の重複を防ぐ．また，式表現を定義し，これを用いて節点の共有及び枝刈りの判定を行う．各頂点が $v_1,v_2,\ldots,v_n$ でラベル付けされた完全グラフ $K_n$ に対して，各辺を ZDD の変数とし，添字番号の小さい頂点に隣接する辺から順に処理していく．

### 2.2 標準形

標準形を与えるにあたり，順序木間における大小関係を定義する．頂点 v の子供の数を c(v)で表す．

順序木 $T_1$ と $T_2$ について，幅優先探索で現れる順に，$T_1$ の各頂点を $a_1,a_2,\ldots,a_s$，$T_2$ の各頂点を $b_1,b_2,\ldots,b_t$ としたとき，

- $c(a_i)=c(b_i)$（$1\leqq i\leqq j-1$）かつ，$c(a_j)>c(b_j)$または $b_j$ が存在しないならば，$T_1$ は $T_2$ より大きいといい，$T_1>T_2$ で表す．
- s=t かつ，任意の $1\leqq i\leqq s$ に対して $c(a_i)=c(b_i)$ならば，$T_1$ と $T_2$ は等しいといい，$T_1=T_2$ で表す．

木 T=(V,E)において，頂点 $u\in V$ が任意の頂点 $v\in V\text{-}\{u\}$との距離の最大値が最も小さい値を持つとき，u は T のセンターであるという．木の直径が偶数のときセンターは 1 個, 奇数の場合はセンターが 2 個になる．

根無し木 T に対して，T のセンターを根として割り当てることによって得られる根付き木を R とする．R に順序を与えた木のうち，定義の大小関係において最も大きい木を T の標準形とする．図 1 では，根無し木 T に対応する順序木 $O_1$ が標準形となる．

任意の木 T に対し，標準形は一意に定まるため，T の代わりに標準形を列挙することによって，すべての根無し木を重複なく列挙することができる．

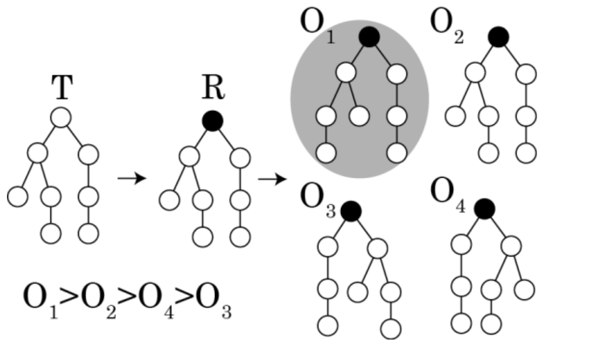


図 1．根無し木 T と対応する標準形

### 2.3　式表現

式表現は，作成途中のグラフにおいて，自身の子孫をすべて含む部分木について同型な兄弟頂点を式で表したものである．フロンティア上の頂点を用いて，対応する頂点同士を括弧で括ることによって，これを表現する．図 2 に示すグラフの式表現は，$\{v_4,v_5,v_6,v_7\}$がフロンティアとなるため，$((v_4v_5),(v_6v_7))$である．

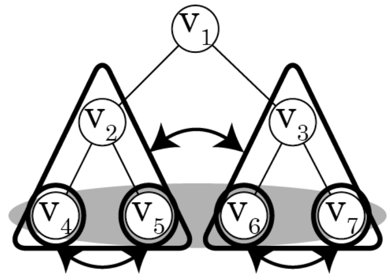


図 2．同型な部分木

### 2.4　共有と枝刈りの判定

ZDD の各節点に式表現を持たせる．新しい節点の式表現は，一つ前の節点の式表現を更新することによって得られる．式表現が等しい節点については，等価な節点として共有が行われる．また，式表現を用いて以下の条件を判定することによって枝刈りを行う．

- グラフはサイクルを持たない．
- グラフの頂点の添字番号が最少である．
- グラフは標準形である．
- グラフのセンターは $v_1$ または$\{v_1,v_2\}$である．

## 参考文献

[1] S. Minato, “Zero-Suppressed BDDs for Set Manipulation in Combinatorial Problems”, In *Proc. of 30th ACM/IEEE DAC*, pp.272-277(1993).
[2] 湊真一, BDD/ZDD を用いたグラフ列挙索引化技法，オペレーションズ・リサーチ, Vol. 57, No. 11, pp.597-603(2012).