平面凸領域における距離の全体分布の近似計算のための行列式点過程

辻野 大陸 †　　岩田 一貴 †

† 広島市立大学 情報科学部 知能工学科

1　はじめに

平面上のある領域内のすべての二点間の距離の全体分布を距離分布という．本論文では，距離分布を近似計算するのに用いる直線の集合を行列式点過程 [2] により生成することを提案する．

2　距離分布の近似計算

■距離分布　簡単のために，平面領域を凸閉曲線に囲まれた開領域（凸領域）に限定する．凸領域 C 内の任意の点 P_1, P_2 の間のユークリッド距離を $D(P_1, P_2)$ とすると，その距離が r 以下の点の対の量は

$$F(r) = \iint_{D(P_1,P_2)<r} dP_1 dP_2$$

と表せる．ここで，$dP_i = [dx_i, dy_i]$ $(i = 1, 2)$ であり，$[\cdot, \cdot]$ は微分に関する外積である [1]．距離分布とは $f(r) = dF(r)/dr$ のことで，距離が丁度 r となる点の対の量（密度）である．

距離分布を直線の集合についての数式で表す．図 1 で示すように，C と交わる直線 g を考え，その交点を A, B とし，線分 AB の長さを ℓ で表す．C における点 P_1, P_2 を g 上の座標 t_1, t_2 で表すと，$[dP_1, dP_2] = [dx_1, dy_1, dx_2, dy_2] = |t_2 - t_1|[dG, dt_1, dt_2]$ となる．この変数変換を経由して，平面における距離分布の基本式 [1] に従い，距離分布を求めると，

$$f(r) = \int_{\mathcal{G}_r} 2r(\ell - r)\, dG$$

となることがわかっている．ただし，ℓ は直線によって定まることに注意されたい．$\mathcal{G}_r$ は $\ell > r$ を満たす直線の集合である．

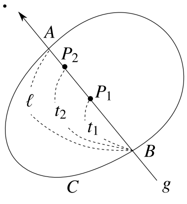
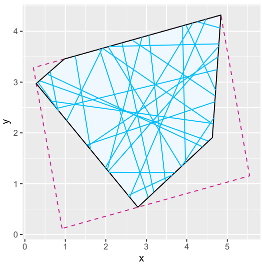


図 1　直線 g 上の座標 t_1, t_2



(a) 凸領域

(b) 距離分布

図 2　実験結果

■近似計算　距離分布の近似計算のために，凸領域 C のバウンディングボックスを覆うように直線の集合を生成する．直線の集合の要素である i 番目の直線 $x \cos\theta_i + y \sin\theta_i = p_i$ が C 内を通る部分（弦）の長さを ℓ_i，その直線が代表する直線の集合の測度を ΔG_i とすると，$f(r)$ は

$$\sum_i 2r(\ell_i - r)\Delta G_i,$$

で近似できる．ΔG_i は C を通る直線の全体量（凸多角形の周長）を直線の集合の要素の数で割った値である（よって，i には依存しない）．直線は $p\theta$ 平面の点 (p_i, θ_i) により定まるから，本論文では行列式点過程を用いて点をランダムに一様に分布させることで，効率よい近似を与える直線の集合を生成する．

■実験　図 2(a) の凸領域（影部分）における距離分布を近似計算した．図の点線はバウンディングボックス，領域を横断する線分は弦を表す．生成した 50 本の直線の集合に基づいた距離分布を図 2(b) に示す．

3　まとめ

距離分布の近似計算に用いる直線の集合を行列式点過程により生成することを提案した．

参考文献

[1] 腰塚武志，応用のための積分幾何学: 図形の測度: 道路網・市街地・施設配置，近代科学社，2019.

[2] G. Gautier et al., DPPy, *JMLR-MLOSS*, 2019.