

# 様々なグラフ上での「うさぎと猟犬」の必勝性について

橋本 悠希<sup>†</sup> 武永 康彦<sup>†</sup>  
<sup>†</sup> 電気通信大学大学院 情報理工学研究科

## 1. はじめに

今日、ボードゲームに関して戦略や計算量についての研究が盛んに行われている([1][2]など). 本稿では、「うさぎと猟犬」[3]というゲームに関して、盤面となるグラフやコマの数を変更した際の必勝性について考察する.

## 2. 「うさぎと猟犬」

「うさぎと猟犬」の盤面と初期配置を図1で示す. 猟犬側は3個のコマを、うさぎ側は1個のコマをそれぞれ扱う. 黒い四角が猟犬のコマで、青い四角がうさぎのコマを表す. 矢印が猟犬のコマの進行方向で、猟犬のコマは進行方向にある頂点か同じ行の頂点のみ移動可能である. 本稿では猟犬の進行方向側を下、進行方向と逆を上とする. うさぎ側は猟犬のコマより上に移動するか、千日手になれば勝利し、猟犬側はうさぎのコマが移動できないようにすれば勝利となる. 「うさぎと猟犬」では、猟犬の必勝であることが先行研究で示されている.

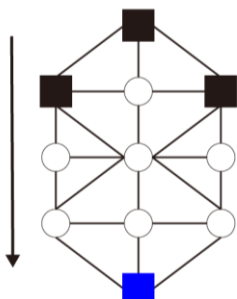


図1 通常の盤面と初期配置

本研究では、盤面となるグラフや猟犬のコマ数を変更した場合の必勝性について考察する. 図1の水平なパス上の頂点集合をレベルと呼ぶ. 盤面は、レベル間の辺は同じパターンで列数 $n$ を変更したグラフおよび、隣接したレベル間が完全二部グラフとなるものを考える. いずれも、レベル数と初期配置でのうさぎのコマと猟犬のコマの距離は十分大きいものとする.

## 3. 通常盤面の列数を変更した場合

列数 $n$ の場合の盤面を図2に示す.

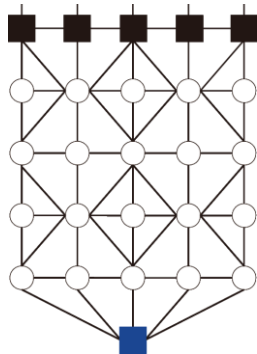


図2 列数 $n=5$ の場合の盤面

### 定理 1.

通常盤面の列数を $n$ とした盤面において以下が成り立つ.

(i)  $n \leq 3$ の場合

猟犬のコマ数 $t$ が $n+1$ 個ならば猟犬の必勝である.

(ii)  $n \geq 4$ の場合

猟犬のコマ数 $t$ が $n$ 個ならば猟犬の必勝である.

略証 猟犬側は図2のように、あるレベル全ての頂点に猟犬のコマがある状況からうさぎのコマと隣接しているコマ以外を1つ下のレベルに移動させ続けられれば、うさぎのコマに上の頂点に移動されることなく、すべてのコマを1レベル下に移動させることができる. そのため、繰り返しコマを移動させればうさぎのコマを盤面下方にまで下げることができ、その次のうさぎの手番でコマを移動できなくなり、猟犬が必勝となる.

## 4. 各レベル間を完全二部グラフにした場合

### 定理 2.

各レベル間を完全二部グラフにした盤面において以下が成り立つ.

(i)  $n \leq 3$ の場合

猟犬のコマ数 $t$ が $3n-2$ 個ならば猟犬の必勝である.

(ii)  $n \geq 4$ の場合

猟犬のコマ数 $t$ が $2n+2$ 個ならば猟犬の必勝である.

略証 猟犬側はあるレベルとその1つ上のレベルすべての頂点と、コマが残っている場合は2つ上のレベルにコマがある状況から定理1と同様に猟犬の全てのコマが1つ下のレベルの頂点にすべてに移動可能である. したがって、これを繰り返し、うさぎのコマを盤面下端に移動させ、猟犬の必勝となる.

### 定理 3.

各レベル間を完全二部グラフにした盤面において以下が成り立つ.

(i)  $n \leq 3$ の場合

猟犬のコマ数 $t$ が $3n-3$ 個ならば猟犬の必勝である.

(ii)  $n \geq 4$ の場合

猟犬のコマ数 $t$ が $2n+1$ 個ならば猟犬の必勝である.

略証 うさぎのコマが上の頂点に移動できない場合や下の頂点のみにしか移動できない場合からでも数手後に上の頂点に移動できるようになる. そのため猟犬のコマがどのように配置されていてもうさぎのコマが上の頂点に移動できるため、うさぎの必勝となる

## 参考文献

- [1] A. Bonato and R. Nowakowski, The Game of Cops and Robbers on Graphs, American Mathematical Society 2011.  
 [2] 安達博之, 亀川裕之, 岩田茂樹,  $N \times N$  盤面上の将棋の指数時間完全性について, 電子情報通信学会論文誌 D, 70(10), 1843-1852, 1987.  
 [3] Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway and Richard K. Guy, Winning Ways for Your Mathematical Plays vol.3 2nd Edition, A K Peters, 711-724, 2003.