超平面による非有界凸胞分割アルゴリズム

田中美智子† 金子邦彦†† 牧之内顕文††

† 九州大学大学院システム情報科学府 〒 812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1
†† 九州大学大学院システム情報科学研究院 〒 812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1
E-mail: †tanaka@db.is.kyushu-u.ac.jp, ††{kaneko,akifumi}@is.kyushu-u.ac.jp

あらまし 我々は、凸胞複体として空間物を扱う空間データベースシステムである Hawk Eye を開発してきた。凸胞複体を構成する凸胞とは、ユークリッド空間上の線形制約式を満足する点集合である。Hawk Eye では、凸胞を表す線形制約式をデータベースに格納しておき、空間演算を行なう際には線形制約式から接続グラフに変換し、それを利用する。我々は、線形制約式表現から接続グラフ表現に変換する方法を考案したが、この過程において、非有界凸胞を超平面で分割する処理が必要であったので、このアルゴリズムを開発した。有界凸胞のみを対象とする既存の凸胞分割アルゴリズムは、凸胞と超平面が交差するか否かを、より次元の低い凸胞である、フェイスと超平面の位置関係のみから判定し、最終的に有界凸胞の頂点と超平面の位置関係を求めることに帰着している。非有界凸胞では、超平面と交差するか否かを、そのフェイスと超平面の位置関係のみを利用するだけでは正しく判定できない場合があるため、既存の方法では、正しく分割することができなかった。そこで、フェイスと超平面の位置関係のみでは正しく交差判定ができない非有界凸胞については、その線形制約式をも利用することで正しく交差判定を行なうアルゴリズムを考案し、実装を行なった。本論文では、本アルゴリズムの詳細と、それが正しく動作することを説明する。

キーワード 非有界凸胞 接続グラフ 超平面

Extended Cell Splitting Algorithm

Michiko TANAKA†, Kunihiko KANEKO††, and Akifumi MAKINOUCHI††

† Graduate School of Imformation Science and Electrical Engineering 6-10-1 Hakozaki Fukuoka Japan
†† Graduate School of Imformation Science and Electrical Engineering 6-10-1 Hakozaki Fukuoka Japan
E-mail: †tanaka@db.is.kyushu-u.ac.jp, ††{kaneko,akifumi}@is.kyushu-u.ac.jp

Abstract We have developed a spatial database system called Hawk Eye in which a spatial object is defined as a cell complex. A cell complex consists of cells which are sets of points in Euclidean space satisfying a linear constraint. In Hawk Eye, a cell is stored in the database as the linear constraint defining it, on the other hand, it is represented by its incidence graph when applying a spatial operation. So, we designed a procedure which convert the linear constraint to the incidence graph. And as splitting of an unbounded cell with a hyperplane is needed, so, we made the presented algorithm. Existing algorithm which splits only bounded cells decides if the hyperplane intersects the bounded cell by using only the topological relationship of the hyperplane and the boundaries of the cell. And as all bounded cells have vertexes, whether a hyperplane intersects a bounded cell can be get only by the topological relationships of the vertexes. Some unbounded cells cannot be decided correctly whether it intersects the hyperplane only using its boundaries. So, an algorithm which decides if a cell intersects the hyperplane correctly for all unbounded cells is presented in this paper. The presented algorithm make use of the linear constraint defining the cell in addition to the topological relationships of the boundaries if needed.

Key words unbounded cell, incidence graph, hyperplane

1. はじめに

我々は任意次元の空間物を扱うことが可能な、Hawk Eye という空間データベースシステムを開発してきた。このシステムにおいて、空間物は凸胞複体 (cell complex) として扱われる。凸胞複体は、次元の異なる種々の物体から構成されるような空間物を表現する際によく用いられるものであり [8]、任意の次元の空間物を一様に表現することができるという良さがある。

凸胞複体は凸胞 (cell) の集合であり、凸胞とは、有限個の線形制約項の連言として定義される線形制約式を満足する点集合である (3. 章で詳しく述べる)。Hawk Eye では、凸胞を表現する線形制約式をデータベースに保存している。そして、*intersection* や *difference* などの空間演算を行なう際には、凸胞の線形制約式から接続グラフを作成し、これを利用する (接続グラフとは、有界、非有界を含む一般の凸胞を表現できる構造である。詳細については 3. 章で説明する)。現在、Hawk Eye で扱う空間物は有界なものだけであるので、我々は有界凸胞の線形制約式からその接続グラフを作成する方法を考案した [4]。この方法では、最終的に得られるのは有界凸胞の接続グラフであるが、その過程で、接続グラフ表現された非有界凸胞を超平面で分割する処理が必要となる。凸胞を超平面で分割するというのは、接続グラフで表現された凸胞と超平面の式が与えられた時、その超平面により定まる 2 つの閉半空間それぞれと凸胞の共通部分として定義される、2 つの凸胞の接続グラフを求めることである。そこで、有界、非有界を含む一般的な凸胞を超平面で分割するアルゴリズムを提案した [5]。

有界凸胞に限り、凸胞を超平面で分割するアルゴリズムが [1] で提案されている。このアルゴリズムでは、まず与えられた凸胞と超平面が交わるか否かを判定するが、これを、より低次元の凸胞であるフェイスと超平面の位置関係のみから判定している。有界凸胞の性質により、これは最終的に、容易に計算できる、0 次元凸胞 (点) と超平面の位置判定に帰着される。

非有界な凸胞が超平面と交わるか否かを求める時、その境界凸胞と超平面の位置関係のみからは判定できない場合がある。そこで、そのような非有界凸胞については、境界凸胞だけでなく、凸胞の線形制約式も利用するようにした。また、境界を持たない凸胞もあるので、その場合は線形制約式のみから判定する。

本論文では、凸胞分割アルゴリズムについて、その詳細と正しく動作することの説明を行なう。

2. 関 連 研 究

凸胞を超平面で分割する問題においては、凸胞と超平面が交差するか否かを調べる必要がある。凸胞は線形制約式を満足する点集合と定義されるので、これは、線形制約式と超平面を定義する制約等式が与えられたとき、それらを同時に満足する解の存在判定となり、線形計画問題の一種である [9]。

Chandrajit らによって提案された有界凸胞を超平面により分割するアルゴリズム [1] は、接続グラフ表現された凸胞と超平面の式を受け取り、その超平面により定まる 2 つの閉半空間それぞれと、凸胞の共通部分として定義される、2 つの凸胞の接続グラフを求めるものである。このアルゴリズムにおいて、凸胞が超平面と交差するか否かの判定が行なわれているが、凸胞の線形制約式と超平面の式を直接解くのではなく、凸胞の境界が超平面に対してどのような位置関係にあるかということを利用している。

凸胞は、その境界と超平面の位置関係により、その凸胞と超平面が交差するか否かを調べられる場合がある。そして特に有界凸胞に限定した場合、その凸胞の境界と超平面がどのような位置関係にあるかを調べるだけで、その有界凸胞が超平面と交差するか否かを求めることができるという性質がある。また、有界凸胞は、必ず頂点を持つという性質も持つ。これらの性質により、有界凸胞が超平面と交差するか否かの判定は、最終的に有界凸胞の頂点と超平面の位置関係の判定に帰着される。そして、これは容易に計算できる。[1] で提案されているアルゴリズムは、有界凸胞のこの性質を利用して、凸胞の超平面による分割を行なっている。

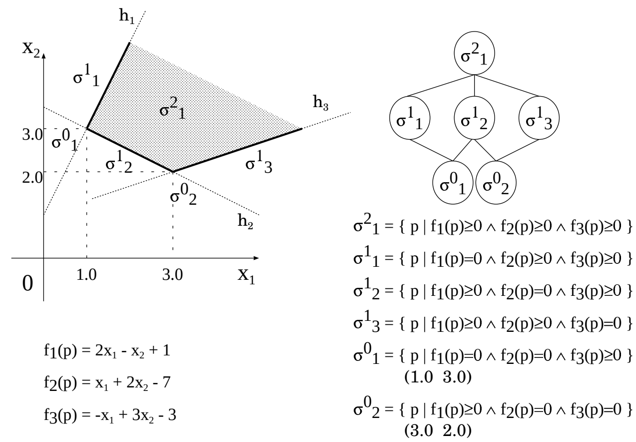

図 1　非有界凸胞とその接続グラフ

一方、非有界凸胞は、その境界と超平面の位置関係だけでは、凸胞が超平面と交差するか否かを求められない場合がある。また、非有界凸胞は、頂点を持つとは限らない。このため、[1] のアルゴリズムは、非有界凸胞の超平面による分割問題には適用できない。

3. 凸胞および接続グラフ

凸胞は、線形制約式を満足する点の集合であり、種々の次元の凸な空間物（点、線分、ポリゴンなど）を一般化した概念である。(このような点集合は polyhedron、H-polyhedron、cell と表記されることもあるが、本論文においては、凸胞と表記する。) 我々は、有界凸胞に限定せず、非有界凸胞も含めた凸胞でを分割する凸胞分割アルゴリズムを開発した。凸胞を定義する線形制約式は、0 個以上の線形制約項の連言であり、線形制約項は、制約等式あるいは制約不等式のいずれかである。以下、本論文で扱う線形制約式及び線形制約項の定義を説明する。

本論文では、d 次元ユークリッド空間を E^d で表記し、点や凸胞などの空間物はこの中に存在するものとする。以下、E^d 中の任意の点 p は、d 個の座標値 $(x_1, x_2, \cdots, x_d)$ を持つ。θ_j を比較演算子 $\leqq$ あるいは $\geqq$ あるいは $=$ とし、$d+1$ 個の係数 a_{ji} $(1 \leqq i \leqq d+1)$ により線形式 $f_j(p) = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jd}x_d + a_{jd+1}$ を定めたとき、線形制約項 $\phi_j(p)$ は $f_j(p)\theta_j 0$ と表記される。但し、d 個の係数 a_{ji} $(1 \leqq i \leqq d)$ のうち少なくとも一つは 0 でないものとする。また、$f_j(p) \leqq 0$ と $f_j(p) \geqq 0$ は制約不等式、$f_j(p) = 0$ は制約等式である。

凸胞 σ は、いくつかの線形制約項の連言を満たす点集合として次のように定義される。

$\sigma = \{p \in \mathbf{E}^d | \phi_1(p) \wedge \phi_2(p) \wedge \cdots \wedge \phi_n(p)\}$

計算幾何学では、凸胞を上記のようにユークリッド空間中の線形制約式で定義せず、抽象凸胞 (abstract cell) として定義する場合もあるが、本論文では上記のように定義する。凸胞を定義する線形制約項 $\phi_j(p)$ が次を満たすとき、$\phi_j(p)$ は冗長な線形制約項である。

$$\begin{aligned}\sigma &= \{p \in \mathbf{E}^d | \phi_1(p) \wedge \cdots \wedge \phi_j(p) \wedge \cdots \wedge \phi_n(p)\} \\ &= \{p \in \mathbf{E}^d | \phi_1(p) \wedge \cdots \wedge \phi_{j-1}(p) \wedge \phi_{j+1}(p) \wedge \cdots \wedge \phi_n(p)\}\end{aligned}$$

凸胞 σ が、冗長な線形制約式の項を含まない、次のような線形制約式 $\Phi(p)$ で定義されるとする。

$$\Phi(p) = \phi_1(p) \wedge \phi_2(p) \wedge \cdots \wedge \phi_n(p)$$

制約等式は m 個、制約不等式は $n-m$ 個

この時、凸胞 σ の次元は、$d-m$ である。0 次元の凸胞は点であり、1 次元の凸胞は線である。凸胞中に任意の異なる二点をとったとき、それらを結ぶ線分上の点は凸胞に含まれるという性質をもつ。凸胞には、有界凸胞と非有界凸胞がある。凸胞 σ の中に任意の異なる二点をとった時、それらの距離より大きい実数 r が存在するとき σ は有界凸胞である。そうでなければ σ は非有界凸胞である。

凸胞 σ_Φ の線形制約式を $\Phi(p)$ とする。$\Phi(p)$ の 0 個以上の制約不等式を制約等式に置き換えた線形制約式を $\Phi'(p)$ とする。この時、次のように定義される凸胞 σ'_Φ は σ_Φ のフェイスである。

$$\sigma'_\Phi = \{p \in \mathbf{E}^d | \Phi'(p)\} \neq \emptyset$$

$\Phi'(p)$ が、$\Phi(p)$ の 1 個の制約不等式を置き換えて作成される線形制約式である時、σ'_Φ を σ_Φ の直接フェイスという。定義より、σ'_Φ の次元は σ_Φ の次元より 1 小さい。

凸胞の集合 F は、次の条件を満たす時、凸胞複体である。

- $\sigma \in F$ の時、σ の任意のフェイス σ' について、$\sigma' \in F$ が成り立つ
- 任意の 2 つの凸胞 $\sigma_1, \sigma_2 \in F$ について、$\sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$ ならば、$\sigma_1 \cap \sigma_2$ は σ_1 のフェイスであり、σ_2 のフェイスでもある

凸胞複体の接続グラフは次のように定義される。

- 任意の節は、凸胞複体 Γ の要素である任意の凸胞と対応する
- もし σ_{Φ_1} が σ_{Φ_2} の直接フェイスならば、σ_{Φ_1} に対応する節と σ_{Φ_2} に対応する節の間には、枝が張られる

$\mathbf{E}^d$ 中の超平面 h_j は、制約等式を満足する点集合として、次のように定義される。

$$h_j = \{p \in \mathbf{E}^d | f_j(p) = 0\}$$

任意の超平面 h_j と点 p は、必ず以下の 3 つのいずれかが成り立つ。

$$f_j(p) > 0$$
$$f_j(p) = 0$$
$$f_j(p) < 0$$

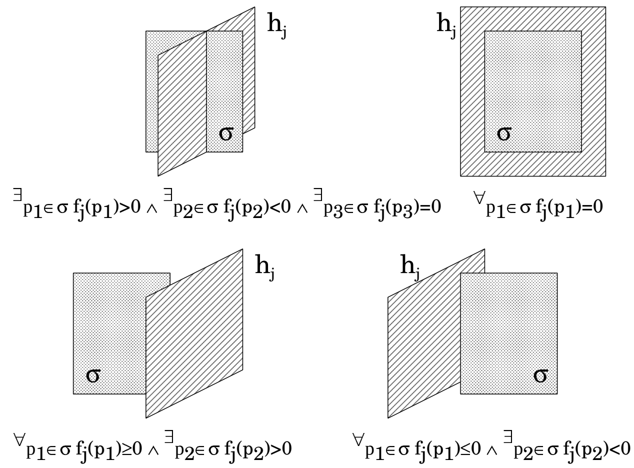

図 2　超平面に対する凸胞の位置

表 1　有界 k 次元フェイス σ^k と σ^k のフェイスの関係

	有界 k 次元フェイス　σ^k			
	内部で交わる	含まれる	表側	裏側
σ^k のフェイス	内部で交わるものがある、又は内部で交わるものがなく表側と裏側が両方ある	全てが含まれる	全て表側、又は表側があり他は含まれる	全て裏側、又は裏側があり他は含まれる

$P = \{p_0, p_1, \cdots, p_k\}$ を、$\mathbf{E}^d$ 中の有限個の点集合とする。次のように定義される点 p を P の $affine\,combination$ であるという [2]。

$$x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i p_i$$
$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$$

全ての P の $affine\,combination$ の集合は $affine\,hull$、$aff P$ と呼ばれる。P に含まれる全ての点 p_i が、$P - \{p_i\}$ の $affine\,combination$ で表現できない時、P はアフィン独立であるという。

4. 超平面による凸胞分割

4.1 超平面に対する凸胞の位置

超平面に対する凸胞の位置は、次の４つに分類できる (図 2)。

- 凸胞は超平面と内部で交わる

$^\exists p_1 \in \sigma f_j(p_1) > 0 \wedge ^\exists p_2 \in \sigma f_j(p_2) < 0 \wedge ^\exists p_3 \in \sigma f_j(p_3) = 0$

- 凸胞は超平面に含まれる

$^\forall p_1 \in \sigma f_j(p_1) = 0$

- 凸胞は超平面の表側にある

$^\forall p_1 \in \sigma f_j(p_1) \geqq 0 \wedge ^\exists p_2 \in \sigma f_j(p_2) > 0$

- 凸胞は超平面の裏側にある

$^\forall p_1 \in \sigma f_j(p_1) \leqq 0 \wedge ^\exists p_2 \in \sigma f_j(p_2) < 0$

4.2 凸胞の性質

s 次元の凸胞のフェイスは、0 次元から s 次元までの凸胞である。任意の凸胞は、超平面に対して内部で交わる、含まれる、

表 2　k 次元フェイス σ^k と σ^k のフェイスの関係
k 次元フェイス σ^k が h に対してある位置関係にある時、σ のフェイスは h に対してとり得る位置関係は限定的になる

	k 次元フェイス　σ^k			
	内部で交わる	含まれる	表側	裏側
σ^k のフェイス		全てが含まれる	全て裏側にない	全て表側にない

表側にある、裏側にある、のいずれかである。ある凸胞 σ の任意の有界 k 次元フェイス σ^k $(0 \leqq k \leqq s)$ がこの４つのある関係にあるとき、σ^k のフェイスのとり得る位置は表 1 のように限定的になる。非有界も含む一般の k 次元フェイスの場合は、表 2 を満足する。

任意の 0 次元凸胞は、任意の超平面に対して表側にある、裏側にある、含まれる、のいずれかを満足する。

任意の有界 k 次元凸胞 σ^k $(1 \leqq k \leqq d)$ の、全ての 0 次元フェイス集合を F^0 とする。

[性質 4.1]　F^0 の全要素について、超平面 h との位置関係が分かっていれば、有界 k 次元凸胞 σ^k と h との位置関係が分かる

具体的には、有界 k 次元凸胞 σ^k と h は、次のようになる。

σ^k は含まれる	全 0 次元フェイスが含まれる
σ^k は表側にある	全 0 次元フェイスが表側である、又は表側の 0 次元フェイスがあり、それ以外は全て含まれる
σ^k は裏側にある	全 0 次元フェイスが裏側である、又は裏側の 0 次元フェイスがあり、それ以外はは含まれる
σ^k は内部で交わる	表側と裏側の 0 次元フェイスがある

任意の有界 k 次元凸胞 σ^k $(1 \leqq k \leqq d)$ の、全ての $k-1$ 次元フェイス集合を F^{k-1} とする。

[性質 4.2]　F^{k-1} の全要素について、超平面 h との位置関係が分かっていれば、有界 k 次元凸胞 σ^k と h との位置関係が分かる

具体的には、有界 k 次元凸胞 σ^k と h は、次のようになる。

σ^k は含まれる	全ての $k-1$ 次元フェイスが含まれる
σ^k は表側にある	全 $k-1$ 次元フェイスが表側である、又は表側の $k-1$ 次元フェイスがあり、それ以外は含まれる
σ^k は裏側にある	全 $k-1$ 次元フェイスが裏側である、又は裏側の $k-1$ 次元フェイスがあり、それ以外は含まれる
σ^k は内部で交わる	内部で交わる $k-1$ 次元フェイスがある 表側と裏側の $k-1$ 次元フェイスがある

接続グラフでは、k 次元凸胞とその $k-1$ 次元フェイスが枝でつながっている。Chandrajit らは、この接続グラフ性質と、性質 4.2 を利用して、有界凸胞の超平面による凸胞分割アルゴリズムを実装している。

制約等式 $f(p)=0$ を満足する点集合である超平面と、m 次元アフィン部分空間は、次を満足する。

[補題 4.1]　k 次元アフィン部分空間 S と超平面 h が与えられたとき、S に含まれる任意のアフィン独立な $k+1$ 個の点集合 $\{p_1, \cdots, p_{k+1}\}$ により、S と h の位置関係は次のようになる

$f(p_1) = \cdots = f(p_{k+1}) = 0$ ならば S は h に含まれる
$f(p_1) = \cdots = f(p_{k+1}) > 0$ ならば S は h の表側にある
$f(p_1) = \cdots = f(p_{k+1}) < 0$ ならば S は h の裏側にある
${}^{\exists}p_{i_1}, {}^{\exists}p_{i_2} \in \{p_1, \cdots, p_{k+1}\}\ f(p_{i_1}) \neq f(p_{i_2})$ ならば S は h と内部で交わる

アフィン部分空間は、有限個の点の集合の *affine hull* として表される。よって S に含まれる任意の点 p_0 は次のように表される。

$$p_0 = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \cdots + \lambda_{k+1} p_{k+1} \quad \Sigma_{i-1}^{k+1} \lambda_i = 1$$

$g(p) = f(p) - a_{d+1}$ とするとき、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} g(p_0) &= g(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \cdots + \lambda_{k+1} p_{k+1}) \\ &= \lambda_1 g(p_1) + \lambda_2 g(p_2) + \cdots + \lambda_{k+1} g(p_{k+1}) \end{aligned}$$

よって $f(p_0)$ は次のように表される。

$$\begin{aligned} f(p_0) &= g(p_0) + a_{d+1} \\ &= \lambda_1 g(p_1) + \lambda_2 g(p_2) + \cdots + \lambda_{k+1} g(p_{k+1}) + a_{d+1} \end{aligned}$$

一方、$f(p_1) = \cdots = f(p_{k+1})$ のとき、$g(p_1) = \cdots = g(p_{k+1}) = 0$ であるので、$f(p_1) = \cdots = f(p_{k+1}) = a_{d+1}$ である。よって、次が成り立つ。

$f(p_1) = \cdots = f(p_{k+1}) = a_{d+1} = 0$ ならば、$f(p_0)$ は次のようになる。$f(p_0) = \lambda_1 g(p_1) + \lambda_2 g(p_2) + \cdots + \lambda_{k+1} g(p_{k+1}) + a_{d+1} = 0.$ このとき、S は h に含まれる。

$f(p_1) = \cdots = f(p_{k+1}) = a_{d+1} > 0$ ならば、$f(p_0)$ は次のようになる。$f(p_0) = \lambda_1 g(p_1) + \lambda_2 g(p_2) + \cdots + \lambda_{k+1} g(p_{k+1}) + a_{d+1} > 0.$ このとき、S は h の表側にある。

${}^{\exists}p_{i_1}, {}^{\exists}p_{i_2} \in \{p_1, \cdots, p_{k+1}\}\ f(p_{i_1}) \neq f(p_{i_2})$ ならば、$f(p_0) > 0$ 又は $f(p_0) = 0$ 又は $f(p_0) < 0$ となり、S は h と内部で交わる。□

直接フェイスを 2 個以上持つ凸胞について、次が成り立つ。

[補題 4.2]　σ^k が 2 つ以上の直接フェイスを持つ場合、$\forall p_0 \in \sigma^k$ について、σ^k の 2 つの直接フェイス上の点をそれぞれ端点とし、p_0 を含む線分が存在する。

σ^k の線形制約式の制約不等式のうち、$\phi_{j_1}(p), \phi_{j_2}(p)$ を、それぞれ制約等式にして定義される直接フェイスを $\sigma_1^{k-1}, \sigma_2^{k-1}$ とする。$\sigma_1^{k-1}, \sigma_2^{k-1}$ を含む $k-1$ 次元アフィン部分空間をそれぞれ S_1^{k-1}, S_2^{k-1} とし、その上にある任意のアフィ

ン独立な点集合をそれぞれ $\{q_{1_1},\cdots,qk_1\},\{q_{1_2},\cdots,qk_2\}$ とする。σ^k の線形制約式の項 $f_j(p)\theta_j 0\ (1 \leqq j \leqq n)$ について、$g_j(p) = f_j(p) - a_{jd+1}$ を定める。$|q_1| = 1$ かつ $g_1(q_1) = 0 \wedge \cdots \wedge g_{j_1}(q_1) > 0 \wedge \cdots \wedge g_n(q_1) = 0$ かつ $(q_{1_1} - q_{k_1}) \bullet q_1 = 0 \wedge \cdots \wedge (q_{k-1_1} - q_{k_1}) \bullet q_1 = 0$ を満たす q_1、及び $|q_2| = 1$ かつ $g_1(q_2) = 0 \wedge \cdots \wedge g_{j_1}(q_2) > 0 \wedge \cdots \wedge g_n(q_2) = 0$ かつ $(q_{1_2} - q_{k_2}) \bullet q_2 = 0 \wedge \cdots \wedge (q_{k-1_2} - q_{k_2}) \bullet q_2 = 0$ を満たす q_2 について、$q = q_1 - q_2$ とする。このとき、$p_0 + \lambda q\ (\lambda \in R)$ で定まる直線は、S_1^{k-1}, S_2^{k-1} と交点 p_1, p_2 を持つ。p_1, p_2 が $\sigma_1^{k-1}, \sigma_2^{k-1}$ 上の点であれば、p_0 は線分 p_1p_2 上にある。p_1 が σ_1^{k-1} 上の点でなければ、線分 p_0p_1 上にある直接フェイス上の点 p_1' が存在し、p_0 は、線分 $p_1'p_2$ 上にある。□

5. 凸胞分割アルゴリズム

凸胞分割アルゴリズムは、3. 章で説明した接続グラフにより表現された凸胞 σ と超平面 h の式 $f(p)$ を入力とし、凸胞 $\sigma \cap \{p|f(p) \geqq 0\}$ 及び $\sigma \cap \{p|f(p) \leqq 0\}$ のフェイスで構成される凸胞複体の接続グラフである。凸胞が超平面 h と内部で交わらない場合は、$\sigma \cap \{p|f(p) \geqq 0\} = \sigma$ かつ $\sigma \cap \{p|f(p) \leqq 0\} = \emptyset$ 、又は $\sigma \cap \{p|f(p) \geqq 0\} = \emptyset$ かつ $\sigma \cap \{p|f(p) \leqq 0\} = \sigma$ となり、出力の接続グラフは、入力の接続グラフと同じである。

5.1 凸胞分割アルゴリズムの概要

凸胞分割アルゴリズムは、次の 2 段階からなる。

（1） 凸胞 σ が超平面 h と内部で交わるか否かを判定

（2） σ が h と内部で交わる場合は、凸胞 $\sigma \cap \{p|f(p) \geqq 0\}$ 及び $\sigma \cap \{p|f(p) \leqq 0\}$ のフェイスで構成される凸胞複体の接続グラフを作成する

凸胞 σ が超平面と内部で交わるか否かは、σ の直接フェイスと超平面の位置関係を利用して調べる。σ の任意の k 次元フェイス σ^k と h の位置関係は、σ^k の直接フェイスと h の位置関係を利用して調べる。そのアルゴリズムは、次のようになる。

σ の任意の k 次元フェイス σ^k が直接フェイスを l 個 $(l \geqq 2)$ 持つ場合、σ^k と h の位置関係を次のように判定する。

- l 個の $k-1$ 次元フェイスのうち、任意の 2 個が含まれるならば、σ^k は含まれる
- l 個の $k-1$ 次元フェイスの中に表側のフェイスが 1 つあり、それ以外が表側または含まれるならば、σ^k は表側にある
- l この $k-1$ 次元フェイスの中に裏側のフェイスが 1 つあり、それ以外が裏側または含まれるならば、σ^k は裏側にある
- l 個の $k-1$ 次元フェイスの中に、内部で交わるフェイスが 1 つあるならば、σ^k は内部で交わる
- l 個の $k-1$ 次元フェイスの中に、表側のフェイスと裏側のフェイスがそれぞれ 1 つあるならば、σ^k は内部で交わる

σ の任意の k 次元フェイス σ^k が直接フェイスを 1 個持つ場合、σ^k と h の位置関係を次のように判定する。直接フェイスを σ^{k-1} とし、p_1 を σ^{k-1} 上の任意の点とする。σ^{k-1} 上のアフィン独立な点集合を $\{q_1,\cdots,q_k\}$ とする。σ^k の線形制約式の項 $f_j(p)\theta_j 0\ (1 \leqq j \leqq n)$ について、$g_j(p) = f_j(p) - a_{jd+1}$ とする。σ^k の制約不等式 $\phi_j(p)$ を制約等式にした線形制約式で σ^{k-1} が定義される時、$g_1(q) = 0 \wedge \cdots \wedge g_j(q) > 0 \wedge \cdots \wedge g_n(q) = 0$ かつ $(q_1 - q_k) \bullet q = 0 \wedge \cdots \wedge (q_k - q_k) \bullet q = 0$ を満足する q により、$q^\infty = \lim_{\lambda \to \infty}(p_1 + \lambda q)$ とする。

- σ^{k-1} が含まれ、$f(q^\infty) = 0$ ならば、σ^k は含まれる
- σ^{k-1} が表側にあり、$f(q^\infty) > 0$ ならば、σ^k は表側にある
- σ^{k-1} が含まれ、$f(q^\infty) > 0$ ならば、σ^k は表側にある
- σ^{k-1} が裏側にあり、$f(q^\infty) < 0$ ならば、σ^k は裏側にある
- σ^{k-1} が含まれ、$f(q^\infty) < 0$ ならば、σ^k は裏側にある
- σ^{k-1} が内部で交わるならば、σ^k は内部で交わる
- σ^{k-1} が表側にあり、$f(q^\infty) < 0$ ならば、σ^k は内部で交わる
- σ^{k-1} が裏側にあり、$f(q^\infty) > 0$ ならば、σ^k は内部で交わる

σ の任意の k 次元フェイス σ^k が直接フェイスを持たない場合、σ^k と h の位置関係を次のように判定する。σ^k に含まれる、任意のアフィン独立な点集合を $\{q_1,\cdots,q_{k+1}\}$ とする。

- $f(q_1) = \cdots = f(q_{k+1}) = 0$ ならば、σ^k は含まれる
- $f(q_1) = \cdots = f(q_{k+1}) > 0$ ならば、σ^k は表側にある
- $f(q_1) = \cdots = f(q_{k+1}) < 0$ ならば、σ^k は裏側にある
- ${}^\exists q_{i_1}, {}^\exists q_{i_2} \in \{q_1,\cdots,q_{k+1}\}\, f(q_{i_1}) \neq f(q_{i_2})$ ならば、σ^k は内部で交わる

5.2 超平面に対する凸胞の 4 種の位置

任意の超平面と凸胞は、4.1 章に示した 4 つの位置関係のいずれかであることを示す。

[補題 5.1] $p_1, p_2 \in \sigma\, f(p_1) > 0\, f(p_2) < 0$ とすると、$f(p_3) = 0$ を満たす点 $p_3(p_3 \in \sigma)$ が存在する。

定義より $f(p)$ は連続関数である。$p_1, p_2 \in \sigma\, f(p_1) > 0\, f(p_2) < 0$ とすると、線分 p_1p_2 の上には、$f(p_3) = 0$ を満たす点 p_3 が存在する。線分 p_1p_2 は σ に含まれるため、p_3 も σ に含まれる。□

[補題 5.2] 任意の凸胞 σ_Φ は、次の 6 通りのいずれかである。

${}^\exists p \in \sigma_\Phi\, f(p) > 0 \wedge \neg({}^\exists p \in \sigma_\Phi\, f(p) = 0) \wedge \neg({}^\exists p \in \sigma_\Phi\, f(p) < 0)$

$\neg({}^\exists p \in \sigma_\Phi\, f(p) > 0) \wedge {}^\exists p \in \sigma_\Phi\, f(p) = 0 \wedge \neg({}^\exists p \in \sigma_\Phi\, f(p) < 0)$

$\neg({}^\exists p \in \sigma_\Phi\, f(p) > 0) \wedge \neg({}^\exists p \in \sigma_\Phi\, f(p) = 0) \wedge {}^\exists p \in \sigma_\Phi\, f(p) < 0$

$\neg({}^\exists p \in \sigma_\Phi\, f(p) > 0) \wedge {}^\exists p \in \sigma_\Phi\, f(p) = 0 \wedge {}^\exists p \in \sigma_\Phi\, f(p) < 0$

${}^\exists p \in \sigma_\Phi\, f(p) > 0 \wedge {}^\exists p \in \sigma_\Phi\, f(p) = 0 \wedge \neg({}^\exists p \in \sigma_\Phi\, f(p) < 0)$

${}^\exists p \in \sigma_\Phi\, f(p) > 0 \wedge {}^\exists p \in \sigma_\Phi\, f(p) = 0 \wedge {}^\exists p \in \sigma_\Phi\, f(p) < 0$

任意の点集合 P は、次の 8 通りのいずれかである。

$\neg(^\exists p \in \mathbf{P}\, f(p) > 0) \wedge \neg(^\exists p \in \mathbf{P}\, f(p) = 0) \wedge \neg(^\exists p \in \mathbf{P}\, f(p) < 0)$
$^\exists p \in \mathbf{P}\, f(p) > 0 \wedge \neg(^\exists p \in \mathbf{P}\, f(p) = 0) \wedge \neg(^\exists p \in \mathbf{P}\, f(p) < 0)$
$\neg(^\exists p \in \mathbf{P}\, f(p) > 0) \wedge {}^\exists p \in \mathbf{P}\, f(p) = 0 \wedge \neg(^\exists p \in \mathbf{P}\, f(p) < 0)$
$\neg(^\exists p \in \mathbf{P}\, f(p) > 0) \wedge \neg(^\exists p \in \mathbf{P}\, f(p) = 0) \wedge {}^\exists p \in \mathbf{P}\, f(p) < 0$
$\neg(^\exists p \in \mathbf{P}\, f(p) > 0) \wedge {}^\exists p \in \mathbf{P}\, f(p) = 0 \wedge {}^\exists p \in \mathbf{P}\, f(p) < 0$
$^\exists p \in \mathbf{P}\, f(p) > 0 \wedge \neg(^\exists p \in \mathbf{P}\, f(p) = 0) \wedge {}^\exists p \in \mathbf{P}\, f(p) < 0$
$^\exists p \in \mathbf{P}\, f(p) > 0 \wedge {}^\exists p \in \mathbf{P}\, f(p) = 0 \wedge \neg(^\exists p \in \mathbf{P}\, f(p) < 0)$
$^\exists p \in \mathbf{P}\, f(p) > 0 \wedge {}^\exists p \in \mathbf{P}\, f(p) = 0 \wedge {}^\exists p \in \mathbf{P}\, f(p) < 0$

このうち、空集合と補題 5.1 で示した集合は凸胞でない。よって任意の凸胞は 6 通りのいずれかである。□

5.3 凸胞が超平面に含まれる

[補題 5.3] σ^k を、直接フェイスを l 個 $(l \geqq 2)$ 持つ k 次元凸胞とする。
σ^k が超平面 h に含まれる $\Leftrightarrow$ l 個の $k-1$ 次元フェイスのうち、h に含まれる $k-1$ 次元フェイスが 2 個ある

$(\Rightarrow)$
任意の 2 個の $k-1$ 次元フェイスを $\sigma_1^{k-1}, \sigma_2^{k-1}$ とする。フェイスの定義より、$^\forall p_1 \in \sigma_1^{k-1}$ は $p_1 \in \sigma^k$ であるので、$f(p_1) = 0$ である。よって σ_1^{k-1} は超平面 h に含まれる。
$(\Leftarrow)$
2 つの h に含まれる $k-1$ 次元フェイスを $\sigma_1^{k-1}, \sigma_2^{k-1}$ とする。σ_1^{k-1} 上には、アフィン独立な k 個の点 $\{p_1, \cdots, p_k\}$ が存在する。σ_1^{k-1} 上に存在せず、σ_2^{k-1} 上に存在する任意の点 p_{k+1} をとると、点集合 $\{p_1, \cdots, p_k, p_{k+1}\}$ はアフィン独立であり、$f(p_1) = \cdots = f(p_k) = f(p_{k+1}) = 0$ である。補題 4.1 より、アフィン独立な点集合 $\{p_1, \cdots, p_k, p_{k+1}\}$ により定まるアフィン部分空間 S は、超平面に含まれる。σ^k は S に含まれるので、σ^k も超平面に含まれる。□

[補題 5.4] σ^k を、直接フェイスを 1 個持つ k 次元凸胞とする。直接フェイスを σ^{k-1} とし、p_1 を σ^{k-1} 上の任意の点とする。q^∞ を 5 ページのように定める。
σ^k が超平面 h に含まれる $\Leftrightarrow$ σ^{k-1} が h に含まれて、$f(q^\infty) = 0$

$(\Rightarrow)$
フェイスの定義より、$^\forall p \in \sigma^{k-1}$ は $p \in \sigma^k$ であるので、$f(p) = 0$ である。よって、σ^{k-1} は h に含まれる。また、q^∞ が $q^\infty \in \sigma^k$ であることが次のように示せる。

$$
\begin{aligned}
f_j(q^\infty) &= lim_{\lambda \to \infty} f_j(p_1 + \lambda q) \\
&= lim_{\lambda \to \infty} \{g_j(p_1) + \lambda g_j(q) + a_{d+1}\} \\
&= lim_{\lambda \to \infty} \{f_j(p_1) + \lambda g_j(q)\} \\
&= lim_{\lambda \to \infty} \lambda g_j(q)
\end{aligned}
$$

よって σ^{k-1} は超平面に含まれ、$f(q^\infty) = 0$ である。
$(\Leftarrow)$
σ^{k-1} 上には、アフィン独立な k 個の点 $\{p_1, \cdots, p_k\}$ が存在する。このとき、点集合 $\{p_1, \cdots, p_k, q^\infty\}$ はアフィン独立であり、

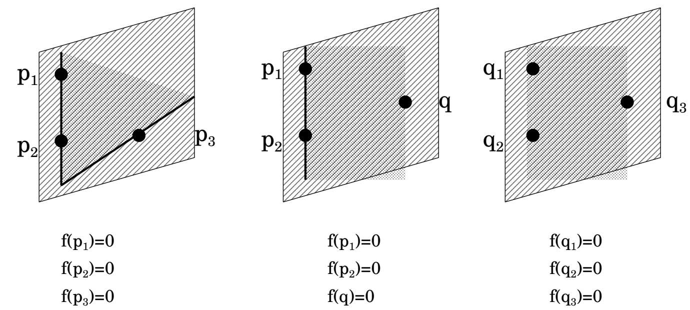

図 3 凸胞が超平面に含まれる例

$f(p_1) = \cdots = f(p_k) = f(q^\infty) = 0$ である。補題 4.1 より、アフィン独立な点集合 $\{p_1, \cdots, p_k, q^\infty\}$ により定まるアフィン部分空間 S は、超平面に含まれる。σ^k は S に含まれるので、σ^k も超平面に含まれる。□

[補題 5.5] σ^k を、直接フェイスを持たない k 次元凸胞とする。σ^k に含まれる、任意のアフィン独立な点集合を $\{q_1, \cdots, q_{k+1}\}$ とする。
σ^k が超平面 h に含まれる $\Leftrightarrow$ $f(q_1) = \cdots = f(q_{k+1}) = 0$

$(\Rightarrow)$
$q_1, \cdots, q_{k+1} \in \sigma^k$ であるので、$f(q_1) = \cdots = f(q_{k+1}) = 0$ である。
$(\Leftarrow)$
補題 4.1 より、アフィン独立な点集合 $\{p_1, \cdots, p_k, p_{k+1}\}$ により定まるアフィン部分空間 S は、超平面に含まれる。σ^k は S に含まれるので、σ^k も超平面に含まれる。□

5.4 凸胞が超平面の表側にある

[補題 5.6] σ^k を、直接フェイスを l 個 $(l \geqq 2)$ 持つ k 次元凸胞とする。
σ^k が超平面 h の表側にある $\Leftrightarrow$ l 個の $k-1$ 次元フェイスのうち、h の表側のフェイスが 1 つあり、それ以外が h の表側、又は h に含まれる (但し、h に含まれる $k-1$ 次元フェイスは 1 個以下)

$(\Rightarrow)$
任意の $k-1$ 次元フェイスを σ^{k-1} とする。フェイスの定義より、$^\forall p \in \sigma^{k-1}$ は $p \in \sigma^k$ であるので、$f(p) \geqq 0$ である。よって σ^{k-1} は超平面 h に含まれるか、又は h の表側にある。全ての $k-1$ 次元フェイスが h に含まれると仮定すると、h に含まれる σ^k の直接フェイスが 2 個存在するため、σ^k が h に含まれることになり、矛盾する。よって、少なくとも 1 つは h の表側の直接フェイスが存在する。また同じ理由により、h に含まれる直接フェイスの数は 1 個以下である。
$(\Leftarrow)$
補題 4.2 より、$p_0 \in \sigma^k$ について、p_0 を通り、σ^k の 2 つの直接 s フェイス上に端点 p_1, p_2 を持つ線分が存在する。$f(p_1) \geqq 0, f(p_2) \geqq 0$ より $f(p_0) \geqq 0$ であるので、$^\forall p \in \sigma^k\, f(p) \geqq 0$ で

ある。また、$p \neq p_1$ かつ $p \neq p_2$ について $f(p) > 0$ であるので、$^\exists p \in \sigma^k\, f(p) > 0$ である。よって、$\forall p \in \sigma^k\, f(p) \geqq 0$ かつ $^\exists p \in \sigma^k\, f(p) > 0$ より、σ^k は超平面 h の表側にある。□

[補題 5.7]　σ^k を、直接フェイスを 1 個持つ k 次元凸胞とする。直接フェイスを σ^{k-1} とし、p_1 を σ^{k-1} 上の任意の点とする。q^∞ を 5 ページのように定める。
σ^k が超平面 h の表側にある $\Leftrightarrow$ σ^{k-1} が h の表側にあり $f(q^\infty) > 0$、又は σ^{k-1} が h に含まれ $f(q^\infty) > 0$

($\Rightarrow$)
フェイスの定義より、$^\forall p \in \sigma^{k-1}$ は $p \in \sigma^k$ であるので、$f(p) \geqq 0$ である。よって σ^{k-1} は超平面 h に含まれるか、又は h の表側にあり、$f(q^\infty) \geqq 0$ である。σ^{k-1} が h に含まれる場合、$f(q^\infty) = 0$ と仮定すると、補題 5.4 より、σ^k が h に含まれることになるので矛盾する。σ^{k-1} が h の表側にある場合、$f(q^\infty) = 0$ と仮定すると、半直線 $p_1 q^\infty$ 上に $p \in \sigma^k\, f(p) < 0$ が存在するので、矛盾する。
($\Leftarrow$)
$p_0 \in \sigma^k$ について、直線 $q^\infty p_0$ と σ^{k-1} の交点を p_1 とする。このとき、p_0 は線分 $q^\infty p_1$ 上にある。$f(p_1) \geqq 0, f(p^\infty) \geqq 0$ より $f(p_0) \geqq 0$ であるので、$^\forall p \in \sigma^k\, f(p) \geqq 0$ である。また、$p \neq p_1$ について $f(p) > 0$ であるので、$^\exists p \in \sigma^k\, f(p) > 0$ である。よって、$^\forall p \in \sigma^k\, f(p) \geqq 0$ かつ $^\exists p \in \sigma^k\, f(p) > 0$ より、σ^k は超平面 h の表側にある。□

[補題 5.8]　σ^k を、直接フェイスを持たない k 次元凸胞とする。σ^k に含まれる、任意のアフィン独立な点集合を $\{q_1, \cdots, q_{k+1}\}$ とする。
σ^k が超平面 h の表側にある $\Leftrightarrow$ $f(q_1) = \cdots = f(q_{k+1}) > 0$

($\Rightarrow$)
σ^k は、アフィン部分空間である。よって補題 4.1 より、σ^k に含まれるアフィン独立な点集合 $\{q_1, \cdots, q_{k+1}\}$ は、$f(q_1) = \cdots = f(q_{k+1}) > 0$ である。
($\Leftarrow$)
補題 4.1 より、アフィン独立な点集合 $\{q_1, \cdots, q_{k+1}\}$ により定まるアフィン部分空間 S は、超平面の表側にある。σ^k は S であるので、σ^k は超平面の表側にある。□

5.5　凸胞が超平面と内部で交わる

[補題 5.9]　σ^k を、直接フェイスを l 個 $(l \geqq 2)$ 持つ k 次元凸胞とする。
σ^k が超平面 h と内部で交わる $\Leftrightarrow$ l 個の $k-1$ 次元フェイスの中に、h と内部で交わるフェイスが 1 つある、又は l 個の $k-1$ 次元フェイスの中に、h の表側のフェイスと裏側のフェイスがそれぞれ 1 つある

($\Rightarrow$)
σ^k の直接フェイス上の点集合を P とする。$\neg(^\exists p_1 \in P\, f(p_1) > 0 \wedge ^\exists p_2 \in P\, f(p_2) < 0)$ と仮定すると、$^\forall p_1 \in P\, f(p_1) \leqq 0 \vee ^\forall p_2 \in P\, f(p_2 \geqq 0)$ である。これらは、(a) 全ての $k-1$ 次元フェイスが h に含まれる (b) l 個の $k-1$ 次元フェイスの中に表側のフェイスが 1 つあり、それ以外が表側又は含まれる (c) l 個の $k-1$ 次元フェイスの中に裏側のフェイスが 1 つあり、それ以外が裏側又は含まれるのいずれかであり、補題 5.3、5.6、より σ^k が h と内部で交わることと矛盾する。よって、$^\exists p_1 \in P\, f(p_1) > 0 \wedge ^\exists p_2 \in P\, f(p_2) < 0$ である。p_1, p_2 が同じ $k-1$ 次元フェイス上にあれば、そのフェイスは h と内部で交わる。p_1, p_2 が同じ $k-1$ 次元フェイス上になければ、表側と裏側のフェイスが存在する。
($\Leftarrow$)
内部で交わる $k-1$ 次元フェイスを σ_1^{k-1} とする。この時、$p_1 \in \sigma_1^{k-1}\, f(p_1) > 0$ と、$p_2 \in \sigma_2^{k-1}\, f(p_2) < 0$ が存在する。フェイスの定義より、$p_1, p_2 \in \sigma^k$ であり、補題 5.1 より、$p_3 \in \sigma^k\, f(p_3) = 0$ が存在する。よって、$^\exists p \in \sigma^k\, f(p) > 0 \wedge ^\exists p \in \sigma^k\, f(p) = 0 \wedge ^\exists p \in \sigma^k\, f(p) < 0$ であるので、σ^k は h と内部で交わる。□

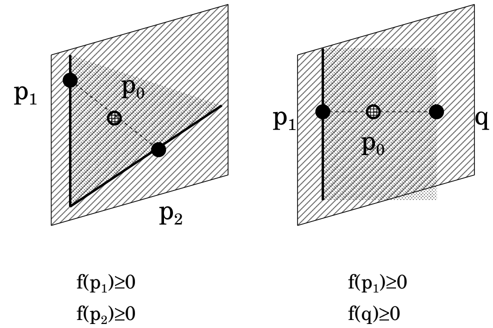

図 4　凸胞が超平面の表側にある例

[補題 5.10]　σ^k を、直接フェイスを 1 個持つ k 次元凸胞とする。直接フェイスを σ^{k-1} とし、p_1 を σ^{k-1} 上の任意の点とする。q^∞ を 5 ページのように定める。
σ^k が超平面 h と内部で交わる $\Leftrightarrow$ σ^{k-1} が h と内部で交わる、又は σ^{k-1} が h の表側にあり $f(q^\infty) < 0$ 又は σ^{k-1} が h の裏側にあり $f(q^\infty) > 0$

($\Rightarrow$)
σ^{k-1} が h に含まれると仮定すると、補題 5.4、5.7 より、σ^k は h に含まれる、表側にある、裏側にあるのいずれかになり、σ^k が h と内部で交わることと矛盾する。σ^{k-1} が h の表側にある場合、$f(q^\infty) \geqq 0$ と仮定すると、補題 5.7 より σ^k が h の表側にあることになり、矛盾する。σ^{k-1} が h の裏側にある場合についても同様である。
($\Leftarrow$)
σ^{k-1} が h と内部で交わる場合は、補題 5.9 と同様にして σ^k が h と内部で交わることが示される。σ^{k-1} が h の表側にあり $f(q^\infty) < 0$ の場合、$p_1 \in \sigma_1^{k-1}\, f(p_1) > 0$ が存在する。フェイスの定義より、$p_1 \in \sigma^k$ である。また、q^∞ は、$q^\infty \in \sigma^k\, f(q^\infty) < 0$

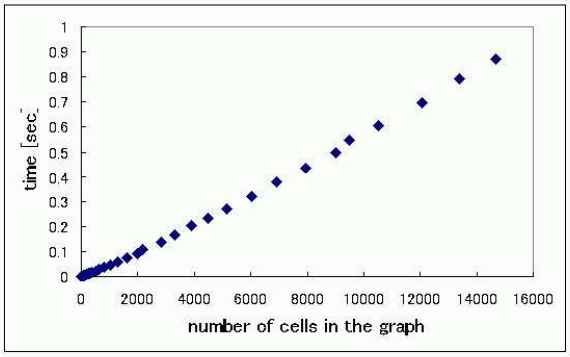

図 5　性能テストの結果

を満足する。補題 5.1 より、$p_3 \in \sigma^k\ f(p_3) = 0$ が存在する。よって、$^\exists p \in \sigma^k\ f(p) > 0 \wedge ^\exists p \in \sigma^k\ f(p) = 0 \wedge ^\exists p \in \sigma^k\ f(p) < 0$ であるので、σ^k は h と内部で交わる。□

［補題 5.11］　σ^k を、直接フェイスを持たない k 次元凸胞とする。σ^k に含まれる、任意のアフィン独立な点集合を $\{q_1, \cdots, q_{k+1}\}$ とする。
σ^k が超平面 h と内部で交わる $\Leftrightarrow$ $^\exists q_{i_1}, ^\exists q_{i_2} \in \{q_1, \cdots, q_{k+1}\}\ f(q_{i_1}) \neq f(q_{i_2})$

$(\Rightarrow)$
σ^k は、アフィン部分空間である。よって補題 4.1 より、σ^k に含まれるアフィン独立な点集合 $\{q_1, \cdots, q_{k+1}\}$ は、$^\exists q_{i_1}, ^\exists q_{i_2} \in \{q_1, \cdots, q_{k+1}\}\ f(q_{i_1}) \neq f(q_{i_2})$ である。
$(\Leftarrow)$
補題 4.1 より、アフィン独立な点集合 $\{q_1, \cdots, q_{k+1}\}$ により定まるアフィン部分空間 S は、超平面と内部で交わる。σ^k は S であるので、σ^k は超平面と内部で交わる。□

6. 性 能 評 価

非有界凸胞分割アルゴリズムを実装し，性能テストを行った。このテストでは、まず d 個のランダムに生成された超平面で構成される d 次元非有界凸胞を作成する。これは d 個の $d-1$ 次元フェイスに接続し、0 次元フェイスを１つだけ持つ凸胞である。これを、ランダムに発生した超平面で分割する処理を N_h 回繰り返す。この分割に要する時間を測定した。

上記のテストを $d=3$、$1 \leqq Nh \leqq 30$ について行った。結果を図 5 に示す。横軸は、s 次元フェイス $(0 \leqq s \leqq d)$ の総数であり、縦軸は分割に要した時間である。環境は Sun Blade 100、512MB メモリ、OS は SunOS 5.10 である。

7. ま と め

非有界凸胞を超平面で分割するアルゴリズムについて、それが正しく動作することを説明した。このアルゴリズムでは、凸胞が超平面と内部で交わるか否かを、そのフェイスと超平面の位置関係を利用して求める。凸胞と超平面の位置関係を求める問題は、その直接フェイスと超平面の位置関係を利用して求める。凸胞の直接フェイスが 1 個のみの場合は、それに加えて線形制約式も利用する。これにより、凸胞と超平面の位置関係を求める問題は、最終的に直接フェイスを持たないような凸胞と超平面の位置関係を求める問題になる。これは、凸胞の線形制約式と超平面の式から求める。

8. 謝　　辞

本研究の一部は、日本学術振興会科学研究費補助金課題番号 17700117, (A)(2)16200005 による。

文　　献

[1] Chandrajit L. Bajaj and Valerio Pascucci, *Splitting a Complex of Convex Polytopes In Any Dimension*, ACM Press, proceedings of the twelfth annual symposium on computational geometry, pp88-97, 1996.
[2] Herbert Edelsbrunner, *Algorithms in Combinatorial Geometry*, Springer-Verlag, 1987
[3] A. Paoluzzi, V. Pascucci, and G. Scorzelli, *Progressive Dimension-Independent Boolean Operations*, Proceeding of the 9-th ACM Symposium on Solid Modeling and Applications (SM04), pp 203-211, 2004
[4] Michiko Tanaka, Kunihiko Kaneko, Yingliang Lu, Akifumi Makinouchi, *An Extended Cell Splitting Algorithm for Spatial Databases*, IEEE TENCON 2004, p.371-374, November 2004
[5] Michiko Tanaka, Kunihiko Kaneko, Akifumi Makinouchi, *Implementation and Evaluation of the Extended Cell Splitting Algorithm*, IEEE TENCON 2005, 2C-05.2, November 2005
[6] Jacob E. Goodman, Joseph O'Rourke, *Handbook of Discrete and Computational Geometry, Second Edition*, CRC Press LLC, April 2004
[7] G. M. Ziegler, *Lectures on Polytopes. Volume 152 of Graduate Texts in Math.*, Springer-Verlag, New York, 1995
[8] Leila De Floriani, David Greenfieldboyce, Annie Hui, *A data structure for non-manifold simplicial d-complexes*, ACM International Conference Proceeding Series Vol.71, Proceedings of the 2004 Eurographics/ACM SIGGRAPH symposium on Geometry processing, pp83-92, 2004
[9] Alexander Schrijver, *Theory of linear and integer programming*, Wiley-Interscience publication, 1998